

# PAIRES ADMISSIBLES D'UNE ALGÈBRE DE LIE SIMPLE COMPLEXE ET $W$ -ALGÈBRES FINIES.

GUILNARD SADAKA\*

**RÉSUMÉ.** Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple complexe et  $e$  un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . Dans cet article, on s'intéresse au problème, soulevé par Premet, d'isomorphisme entre les  $W$ -algèbres finies construites à partir de certaines sous-algèbres nilpotentes de  $\mathfrak{g}$ , dites  *$e$ -admissibles*. On considère une version graduée de ce problème et on introduit les notions de paire et graduation  *$e$ -admissibles*. On montre que la  $W$ -algèbre associée à une paire  *$e$ -admissible* possède des propriétés similaires à celle introduite par Gan et Ginzburg. De plus, on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des paires admissibles et montre que si deux paires sont équivalentes, alors les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes. En introduisant la notion de la connexité pour les graduations  *$e$ -admissibles*, on réduit le problème d'isomorphisme à l'étude de l'équivalence des paires admissibles pour une graduation admissible fixée. Ceci nous permet de montrer ensuite que les paires admissibles relativement aux graduations  *$b$ -optimales* sont équivalentes. On retrouve comme cas particulier un résultat de Brundan et Goodwin. Dans la dernière partie, on utilise nos résultats pour résoudre complètement le problème d'isomorphisme dans quelques cas particuliers.

**ABSTRACT.** Let  $\mathfrak{g}$  be a complex simple Lie algebra and  $e$  a nilpotent element of  $\mathfrak{g}$ . We are interested in the isomorphism question (raised by Premet) between the finite  $W$ -algebras constructed from some nilpotent subalgebras of  $\mathfrak{g}$  called  *$e$ -admissible*. We introduce the concept of  *$e$ -admissible pair* and  *$e$ -admissible grading*. We show that the  $W$ -algebra associated to an  *$e$ -admissible pair* admits similar properties to the ones introduced by Gan and Ginzburg. Moreover, we define an equivalence relation on the set of admissible pairs and we show that if two admissible pairs are equivalent, it follows that the associated  $W$ -algebras are isomorphic. By introducing the notion of connectivity of admissible gradings, we reduce the isomorphism question to the study of the equivalence of admissible pairs for a fixed admissible grading. This allows us to prove that admissible pairs relative to  *$b$ -optimal* gradings are equivalent, hence the corresponding  $W$ -algebras are isomorphic. We recover as a special case a result of Brundan and Goodwin. In the final part, we use our results to find a complete answer to the isomorphism question in some particular cases.

## 1. INTRODUCTION

1.1. Soient  $\mathbb{k}$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple de dimension finie définie sur  $\mathbb{k}$  et de groupe adjoint  $G$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Comme celle-ci est non dégénérée sur  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ , elle induit un isomorphisme

$$\kappa : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad x \longmapsto \langle x, \cdot \rangle$$

de  $\mathfrak{g}$  sur son dual  $\mathfrak{g}^*$ . Soient  $e$  un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et  $\chi$  la forme linéaire  $\kappa(e)$ . D'après le Théorème de Jacobson-Morosov (cf. e.g. [24, Theorem 32.1.5]),  $e$  est contenu dans un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, h, f)$  de  $\mathfrak{g}$ . On rappelle qu'un tel triplet vérifie les relations :

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

---

\*La majorité de ce travail a été financée par le Centre National de la Recherche Scientifique Libanais.

De plus,  $e$  et  $f$  sont dans la même  $G$ -orbite et  $\text{ad } h$  est un élément semi-simple dont les valeurs propres sont entières. Ceci définit sur  $\mathfrak{g}$  un  $\mathbb{Z}$ -graduation appelée une *gradation de Dynkin associée à  $e$* .

On pose

$$\mathfrak{p}_+ := \bigoplus_{j \geq 0} \mathfrak{g}(j)$$

où  $\mathfrak{g}(j) := \{x \in \mathfrak{g} ; [h, x] = jx\}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\mathfrak{p}_+$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  qui contient  $\mathfrak{g}^e$ , le centralisateur de  $e$  dans  $\mathfrak{g}$ . Il en résulte que la forme bilinéaire

$$\mathfrak{g}(-1) \times \mathfrak{g}(-1) \longrightarrow \mathbb{k}, \quad (x, y) \longmapsto \langle e, [x, y] \rangle$$

est non dégénérée. Soit  $\mathfrak{l}$  un sous-espace lagrangien de  $\mathfrak{g}(-1)$  relativement à cette forme, c'est-à-dire un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale, et posons :

$$(1) \quad \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e} := \mathfrak{l} \oplus \bigoplus_{j \leq -2} \mathfrak{g}(j).$$

Alors  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$  est une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{g}$  qui vérifie  $\langle e, [\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}, \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}] \rangle = \{0\}$ . De plus,  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  et  $\dim \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e} = \frac{1}{2} \dim G \cdot e$  si  $G \cdot e$  désigne l'orbite de  $e$  dans  $\mathfrak{g}$  sous l'opération adjointe de  $G$ .

À l'élément nilpotent  $e$  et la sous-algèbre ad-nilpotente  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$ , on associe une algèbre d'endomorphismes  $H_{\mathfrak{l}, e}$ , appelée *W-algèbre finie associée à  $e$* , dont on rappelle une construction ci-dessous. Les *W-algèbres finies* ont été introduites par Premet [21]. Dans le cas des éléments nilpotents pairs (i.e.  $\mathfrak{g}(-1) = \mathfrak{g}(1) = \{0\}$ ), elles furent introduites par Lynch [20], généralisant ainsi la construction de Kostant [18] correspondant au cas des éléments nilpotents réguliers. L'étude des *W-algèbres finies* a connu un essor particulièrement intense, notamment en raison de leur importance dans la théorie des représentations comme l'illustre l'équivalence de Skryabin, [23].

On note  $U(\mathfrak{g})$  et  $U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e})$  les algèbres enveloppantes de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$  respectivement. Soient  $\mathbb{k}_e$  le  $U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e})$ -module à gauche correspondant au caractère  $\chi|_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}}$  de  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$  et  $I_{\mathfrak{l}, e}$  l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$  avec  $x \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}$ . Soient

$$Q_{\mathfrak{l}, e} := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e})} \mathbb{k}_e \simeq U(\mathfrak{g})/I_{\mathfrak{l}, e}$$

la *représentation de Gelfand-Graev généralisée*, et  $H_{\mathfrak{l}, e}$  l'algèbre d'endomorphismes

$$(2) \quad H_{\mathfrak{l}, e} := Q_{\mathfrak{l}, e}^{\text{ad } \mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e}} \simeq \text{End}_{\mathfrak{g}}(Q_{\mathfrak{l}, e})^{\text{op}}.$$

On peut généraliser les constructions de  $Q_{\mathfrak{l}, e}$  et  $H_{\mathfrak{l}, e}$  comme suit. À toute sous-algèbre ad-nilpotente  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions suivantes,

- ( $\chi 1$ )  $\chi([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = \{0\}$  ;
- ( $\chi 2$ )  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  ;
- ( $\chi 3$ )  $\dim \mathfrak{m} = (\dim G \cdot e)/2$ ,

on définit une algèbre d'endomorphismes  $H(\mathfrak{m}, e)$  suivant la construction (2). Précisément, on pose

$$H(\mathfrak{m}, e) := Q(\mathfrak{m}, e)^{\text{ad } \mathfrak{m}} \simeq \text{End}_{\mathfrak{g}}(Q(\mathfrak{m}, e))^{\text{op}},$$

où  $Q(\mathfrak{m}, e)$  est le quotient de  $U(\mathfrak{g})$  par l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$  avec  $x \in \mathfrak{m}$ . On dira que  $H(\mathfrak{m}, e)$  est la *W-algèbre finie associée à  $\mathfrak{m}$* . Une question naturelle, soulevée par A. Premet, est la suivante :

**Question 1.** *Si  $\mathfrak{m}$  est une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions ( $\chi 1$ ), ( $\chi 2$ ) et ( $\chi 3$ ), les *W-algèbres*  $H(\mathfrak{m}, e)$  et  $H_{\mathfrak{l}, e} = H(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}, e})$  sont-elles isomorphes ?*

Cette question est d'autant plus naturelle que la réponse est affirmative, d'après un résultat de Premet [21], dans le cas où le corps de base est de caractéristique positive. La  $W$ -algèbre  $H(\mathfrak{m}, e)$  dépend uniquement de l'orbite de  $e$  dans  $\mathfrak{g}$ , à conjugaison près. Comme  $e$  sera fixé dans la suite, nous noterons désormais plus simplement  $H(\mathfrak{m})$  et  $Q(\mathfrak{m})$  l'algèbre  $H(\mathfrak{m}, e)$  et le quotient  $Q(\mathfrak{m}, e)$  respectivement.

1.2. Pour le cas où le corps de base est de caractéristique nulle, les résultats, partiels, obtenus jusqu'ici sont valables sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Ils sont essentiellement dûs à W. Gan et V. Ginzburg d'une part (cf. [11]) et à J. Brundan et S. Goodwin d'autre part (cf. [3]). On les résume ci-dessous. On suppose désormais que  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ .

Tout d'abord, W. Gan et V. Ginzburg montrent que l'algèbre  $H_{\mathfrak{l}, e}$  ne dépend pas, à un isomorphisme près, du choix du sous-espace lagrangien  $\mathfrak{l}$  dans  $\mathfrak{g}(-1)$ , [11, Theorem 4.1].

On notera désormais plus simplement  $H_e$  l'algèbre  $H_{\mathfrak{l}, e}$  (définie à un isomorphisme près). Plus récemment, J. Brundan et S. Goodwin étendent le résultat de Gan et Ginzburg comme suit. Soit  $\Gamma$  une  $2d$ -bonne  $\mathbb{Z}$ -graduation pour  $e$ , c'est-à-dire une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_{2d}$  et telle que l'application linéaire  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j+2d}$  est injective pour tout  $j \leq -d$  et surjective pour tout  $j \geq -d$  (cf. [3, §5])<sup>1</sup>. La restriction de la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto \langle e, [x, y] \rangle$  à  $\mathfrak{g}_{-d} \times \mathfrak{g}_{-d}$  est non dégénérée. Si  $\mathfrak{g}_{-d}^0$  est un sous-espace lagrangien de  $\mathfrak{g}_{-d}$ , alors

$$(3) \quad \mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{-d}^0 \oplus \bigoplus_{j < -d} \mathfrak{g}_j$$

est une sous-algèbre ad-nilpotente  $\Gamma$ -graduée de  $\mathfrak{g}$  vérifiant les conditions  $(\chi 1)$ ,  $(\chi 2)$  et  $(\chi 3)$  ci-dessus. Le résultat principal de [3] assure que les algèbres  $H(\mathfrak{m})$  et  $H_e$  sont isomorphes. En particulier, l'algèbre  $H(\mathfrak{m})$  ne dépend pas, à un isomorphisme près, du choix du sous-espace lagrangien  $\mathfrak{g}_{-d}^0$  dans  $\mathfrak{g}_{-d}$ .

1.3. La définition suivante est centrale dans cet article (cf. Définition 2.2) :

**Définition 1.** Soient  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ . On dit que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est **admissible pour  $e$**  (ou  **$e$ -admissible**) s'il existe une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  et un entier  $a > 1$  tels que :

- (A1):  $e \in \mathfrak{g}_a$ ;
- (A2):  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont  $\Gamma$ -graduées et  $\bigoplus_{j \leq -a} \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \bigoplus_{j < 0} \mathfrak{g}_j$ ;
- (A3):  $\mathfrak{m}^\perp \cap [\mathfrak{g}, e] = [\mathfrak{n}, e]$ ;
- (A4):  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ ;
- (A5):  $[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ ;
- (A6):  $\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e$ .

On dit qu'une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est **admissible pour  $e$**  s'il existe un entier  $a > 1$  tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et s'il existe une paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma$ .

La  $W$ -algèbre associée à une paire  $e$ -admissible  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est définie par

$$H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) := Q(\mathfrak{m})^{\text{ad } \mathfrak{n}}$$

---

1. Dans [3], les auteurs considèrent des bonnes  $\mathbb{R}$ -graduations qui se définissent de manière analogue.

où  $Q(\mathfrak{m})$  est le quotient de  $U(\mathfrak{g})$  par l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$  avec  $x \in \mathfrak{m}$ . Les  $2d$ -bonnes  $\mathbb{Z}$ -graduations pour  $e$  sont des cas particuliers de  $\mathbb{Z}$ -graduations admissibles pour  $e$  mais il existe des  $\mathbb{Z}$ -graduations admissibles pour  $e$  qui ne sont pas  $2d$ -bonnes pour  $e$  (voir Exemple 2.8).

1.4. On s'intéresse dans cet article au problème d'isomorphisme suivant.

**Question 2.** *Si  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont deux paires  $e$ -admissibles de  $\mathfrak{g}$ , les  $W$ -algèbres  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $H(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont-elles isomorphes ?*

Dans un premier temps, on obtient une caractérisation des graduations  $e$ -admissibles.

**Théorème 1** (Théorème 2.14). *Une graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est admissible pour  $e$ , avec  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a > 1$ , si et seulement si  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .*

On s'intéresse ensuite aux propriétés de l'algèbre  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . On montre qu'il existe une variété affine  $\mathcal{S}$  transverse aux orbites coadjointes de  $\mathfrak{g}^*$ . De plus, on construit une *filtration de Kazhdan généralisée*  $\mathcal{F}$  sur  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et on obtient le résultat suivant qui étend [11, Theorem 4.1].

**Théorème 2** (Théorèmes 3.18 et 3.25). *L'algèbre graduée  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ , l'algèbre des fonctions régulières définies sur  $\mathcal{S}$ . De plus, si  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ , on a l'équivalence de Skryabin pour  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ .*

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des paires  $e$ -admissibles pour réduire le problème d'isomorphisme de la Question 2. On dit que deux paires  $e$ -admissibles  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont **comparables** (cf. Définition 4.1) s'il existe une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\Gamma$  telle que  $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$  soient  $\Gamma$ -graduées et si,

$$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{n}' \subseteq \mathfrak{n} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}'.$$

On dit que deux paires  $e$ -admissibles  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont **équivalentes** (cf. Définition 4.8) s'il existe un entier  $s \geq 1$  et une suite  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1), \dots, (\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s)$  de paires  $e$ -admissibles tels que :

- \*  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  ;
- \*  $(\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s) = (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  ;
- \*  $(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)$  et  $(\mathfrak{m}_{i+1}, \mathfrak{n}_{i+1})$  soient comparables pour tout  $i \in \{1, \dots, s-1\}$ .

On montre alors :

**Théorème 3** (Théorème 4.11). *Si  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont deux paires  $e$ -admissibles équivalentes, alors les algèbres  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $H(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont isomorphes.*

En conséquence, pour traiter le problème d'isomorphisme de la Question 2, il suffit d'étudier la relation d'équivalence sur l'ensemble des paires  $e$ -admissibles. On introduit ensuite les notions de graduations  $e$ -admissibles adjacentes et connexes. Deux graduations  $\Gamma, \Gamma'$  admissibles pour  $e$  sont dites **adjacentes** si elles ont une paire  $e$ -admissible en commun. Deux graduations  $\Gamma, \Gamma'$  admissibles pour  $e$  sont dites **connexes** s'il existe une suite  $(\Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de graduations admissibles pour  $e$  telle que

- (1)  $\Gamma = \Gamma_1$  ;
- (2) les graduations  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  sont adjacentes pour tout  $1 \leq i \leq s-1$  ;
- (3)  $\Gamma' = \Gamma_s$ .

On montre alors le résultat suivant.

**Théorème 4** (Théorèmes 5.7 et 5.15). *Les graduations admissibles pour  $e$  sont connexes à une graduation de Dynkin. En particulier, elles sont connexes entre elles.*

Grâce à ce dernier résultat, le problème d'isomorphisme se réduit à l'étude de la relation d'équivalence sur l'ensemble des paires  $e$ -admissibles pour une graduation  $e$ -admissible donnée. Dans ce contexte, on définit la notion de graduation  $b$ -optimale. Pour  $b > 0$ , on dit qu'une graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est  **$b$ -optimale pour  $e$**  si  $\mathfrak{g}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  et s'il existe  $a \in \mathbb{N}$ , avec  $a \geq 2$ , tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ .

On montre les résultats suivants.

**Théorème 5** (Théorèmes 6.7 et 6.9). *Soit  $\Gamma = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une graduation  $b$ -optimale de  $\mathfrak{g}$ . Alors les paires  $e$ -admissibles relativement à  $\Gamma$  sont équivalentes entre elles. De plus, elles sont équivalentes à celles issues d'une graduation de Dynkin.*

En particulier, les paires  $e$ -admissibles relatives à une  $2d$ -bonne graduation et construites dans [3] sont équivalentes à celles issues d'une graduation de Dynkin. On retrouve ainsi [3, Theorem 1].

On traite enfin quelques cas particuliers. Le premier est le suivant.

**Théorème 6** (Théorème 7.1). *Soit  $\Gamma = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une graduation  $e$ -admissible de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathfrak{g}_{b-a} + \mathfrak{g}_{-b})$ , avec,  $b \in ]0, \frac{a}{2}]$ . Alors les paires  $e$ -admissibles relativement à  $\Gamma$  sont équivalentes entre elles.*

Soit  $\mathfrak{s}$  la sous-algèbre engendrée par le  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, h, f)$ . Son centralisateur  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  dans  $\mathfrak{g}$  est une algèbre réductive égale à  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h$ . Lorsque  $e$  est distingué,  $\mathrm{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 0$  et les graduations admissibles sont connexes (et même adjacentes) à la graduation de Dynkin, cf. Propositions 2.9 et 5.1. La réponse à la Question 1 est donc positive. Il semble ensuite naturel de considérer le cas où  $\mathrm{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ . On montre le résultat suivant.

**Théorème 7** (Théorèmes 7.7, 7.10 et 7.11, §7.4). *Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit ou bien de type classique, ou bien de type exceptionnel  $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$ . Si  $\mathrm{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , alors les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

Compte tenu de ces résultats, on formule la conjecture suivante.

**Conjecture 1.** *Si  $\mathrm{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , alors les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

Résoudre cette conjecture serait une première étape dans la résolution de la conjecture plus générale suivante.

**Conjecture 2.** *Les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

**Remerciements.** Une grande partie de ce travail s'inscrit dans le cadre de ma thèse. Je remercie Rupert Yu et Anne Moreau, mes deux directeurs de thèse, pour leur patience et pour avoir orienté ce travail et partagé leurs idées durant des discussions enrichissantes. Je remercie également Simon Goodwin pour son intérêt envers mes travaux et ses remarques fructueuses.

## 2. GRADUATIONS ET PAIRES ADMISSIBLES

Dans cette section, on conserve les notations de l'introduction. Si  $x \in \mathfrak{g}$ , on note  $\mathfrak{g}^x$  son centralisateur dans  $\mathfrak{g}$ .

2.1. Si  $U$  est un sous-espace de  $\mathfrak{g}$ , on note  $U^\perp$  son orthogonal par rapport à la forme de Killing. Si deux sous-espaces  $U$  et  $V$  de  $\mathfrak{g}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing, alors  $\dim U = \dim V$ .

**Lemme 2.1.** *Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une  $\mathbb{Q}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$ . Il existe un élément semisimple  $h_\Gamma \in \mathfrak{g}$  tel que*

$$\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g}; [h_\Gamma, x] = jx\}.$$

*Démonstration.* L'opérateur  $\partial : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui à  $x \in \mathfrak{g}_j$  associe  $jx$  est une dérivation sur l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$ . Par suite, c'est une dérivation intérieure de  $\mathfrak{g}$  donnée par  $\text{ad } h_\Gamma$  pour un élément semisimple  $h_\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$  (cf. e.g. [24, Proposition 20.1.5]).  $\square$

Soient  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une gradation de  $\mathfrak{g}$  et  $h_\Gamma$  l'élément semisimple définissant  $\Gamma$ . Comme la forme de Killing est  $\mathfrak{g}$ -invariante, donc  $\text{ad } h_\Gamma$ -invariante, les sous-espaces  $\mathfrak{g}_i$  et  $\mathfrak{g}_{-i}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing pour tout  $i$ . En particulier, ils sont de même dimension.

Pour une  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  et pour tout  $k \in \mathbb{Q}$ , on désigne par  $\mathfrak{g}_{\leq k}$ ,  $\mathfrak{g}_{< k}$ ,  $\mathfrak{g}_{\geq k}$ ,  $\mathfrak{g}_{> k}$  les sommes  $\bigoplus_{j \leq k} \mathfrak{g}_j$ ,  $\bigoplus_{j < k} \mathfrak{g}_j$ ,  $\bigoplus_{j \geq k} \mathfrak{g}_j$ ,  $\bigoplus_{j > k} \mathfrak{g}_j$  respectivement.

2.2. Rappelons que  $\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  désigne l'isomorphisme de Killing. On fixe pour la suite un élément nilpotent  $e$  de  $\mathfrak{g}$  et on pose  $\chi := \kappa(e)$ . Rappelons la définition centrale de cet article.

**Définition 2.2.** *Soient  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ . On dit que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est **admissible pour  $e$**  (ou  **$e$ -admissible**) s'il existe une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  et un entier  $a > 1$  tels que :*

- (A1):  $e \in \mathfrak{g}_a$ ;
- (A2):  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont graduées et vérifient  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{g}_{< 0}$ ;
- (A3):  $\mathfrak{m}^\perp \cap [\mathfrak{g}, e] = [\mathfrak{n}, e]$ ;
- (A4):  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ ;
- (A5):  $[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ ;
- (A6):  $\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e$ .

*On dit qu'une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est **admissible pour  $e$**  s'il existe un entier  $a > 1$  tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et s'il existe une paire admissible pour  $e$  par rapport à cette gradation.*

*Dans le cas particulier où  $\mathfrak{m}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  telle que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  soit admissible pour  $e$ , on dit que la sous-algèbre  $\mathfrak{m}$  est **admissible pour  $e$** .*

**Remarque 2.3.** *Soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est une paire admissible pour  $e$ . D'après la Définition 2.2, on a les propriétés suivantes :*

- (1) les sous-algèbres  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont *ad-nilpotentes*;
- (2)  $\mathfrak{m}^\perp \subseteq \mathfrak{g}_{\leq a-1}$ ;
- (3)  $\chi([\mathfrak{n}, \mathfrak{m}]) = \{0\}$ ;
- (4)  $\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n}$  et  $\dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{n}$  sont pairs.

**Définition 2.4.** On dit qu'une paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  relativement à une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est **optimale** si  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a}$ .

On désigne désormais par  $PA(e)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  et par  $GA(e)$  l'ensemble des graduations admissibles pour  $e$ . Pour  $\Gamma \in GA(e)$ , on note  $PA(e, \Gamma)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  relativement à  $\Gamma$ .

**Exemple 2.5.** Soit  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$ . On désigne par  $\Gamma_{\text{Dyn}}^h$  la graduation de Dynkin associée à  $h$ ,

$$\Gamma_{\text{Dyn}}^h : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j,$$

où  $\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g} ; \text{ad } h(x) = jx\}$ . En particulier,  $e \in \mathfrak{g}_2$ .

Posons

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{j \leq -2} \mathfrak{g}_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{j < 0} \mathfrak{g}_j.$$

On vérifie sans peine que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma_{\text{Dyn}}^h)$ . La graduation  $\Gamma_{\text{Dyn}}^h$  est donc  $e$ -admissible.

**Exemple 2.6.** Si  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est une graduation admissible pour  $e$  définie par l'élément semisimple  $h_\Gamma$ , alors la graduation  $\Gamma' : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$  définie par l'élément

$$h_{\Gamma'} := kh_\Gamma \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

est admissible pour  $e$ . On notera  $k\Gamma$  la graduation  $\Gamma'$ .

**Exemple 2.7.** Une 2d-bonne graduation pour  $e$  de  $\mathfrak{g}$  est  $e$ -admissible. En effet, soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une 2d-bonne graduation pour  $e$ . On vérifie sans peine que pour  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-d}^0 \oplus \mathfrak{g}_{< -d}$  de  $\mathfrak{g}$  (cf. §1.2 de l'Introduction),  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \in PA(e, \Gamma)$  donc  $\Gamma \in GA(e)$ .

Prenons l'exemple où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$  et  $e = E_{1,3}$ . On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple  $h_\Gamma := \frac{1}{3} \text{diag}(2, 2, -4)$ . Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont homogènes et leurs degrés sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La sous-algèbre  $\mathfrak{g}_{-2}$  est une sous-algèbre admissible pour  $e$  relativement à  $\Gamma$ . De plus, la graduation  $\Gamma$  est une graduation non Dynkin mais bonne pour  $e$ .

Il est important de remarquer qu'une graduation admissible pour  $e$  n'est pas toujours bonne, comme l'illustre l'exemple suivant.

**Exemple 2.8.** On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$  et  $e := E_{1,3} + E_{2,4}$ . On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple

$$\frac{1}{2} \text{diag}(3, 1, -1, -3).$$

En particulier,  $e \in \mathfrak{g}_2$ . Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont homogènes pour cette graduation et leurs degrés sont donnés sur la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Posons*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -2} \text{ et } \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}E_{2,1} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}.$$

On montre par calcul direct que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$  avec  $a = 2$ . Comme  $\text{ad}(e) : \mathfrak{g}_{-1} \rightarrow \mathfrak{g}_1$  n'est pas injective, ceci fournit un exemple d'une graduation admissible pour  $e$  qui n'est pas bonne pour  $e$ .

2.3. On fixe une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$ ,

$$(4) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j,$$

et soit  $h_\Gamma$  l'élément semisimple de  $\mathfrak{g}$  définissant  $\Gamma$ . On suppose que  $e \in \mathfrak{g}_a$ , avec  $a > 1$ .

**Proposition 2.9.** *Si  $e$  est un élément nilpotent distingué de  $\mathfrak{g}$ , alors les graduations de Dynkin sont les seules graduations de  $\mathfrak{g}$  admissibles pour  $e$ , à homothéties près (cf. Exemple 2.6).*

*Démonstration.* Supposons que  $e$  soit un élément nilpotent distingué de  $\mathfrak{g}$  et que la graduation (4) soit admissible pour  $e$ . Soit  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$ , cf. [24, Proposition 32.1.7]. L'élément  $t := \frac{a}{2}h - h_\Gamma$  centralise  $e$  et il est semisimple. Comme  $e$  est distingué, on a  $t = 0$  et donc  $h_\Gamma = \frac{a}{2}h$ , d'où la proposition.  $\square$

De façon générale, pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on désigne par  $\mathfrak{g}_k^e$  l'intersection de  $\mathfrak{g}_k$  avec  $\mathfrak{g}^e$ .

**Lemme 2.10.** *Soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_k \rightarrow \mathfrak{g}_{k+a}$  soit injective. Alors l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{-(k+a)} \rightarrow \mathfrak{g}_{-k}$  est surjective. En particulier, on a  $\dim \mathfrak{g}_k = \dim \mathfrak{g}_{-(k+a)} - \dim \mathfrak{g}_{-(k+a)}^e$ .*

*Démonstration.* On a  $[e, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k+a}$  et  $\dim[e, \mathfrak{g}_k] = \dim \mathfrak{g}_k$ . Comme  $\mathfrak{g}_{k+a}$  et  $\mathfrak{g}_{-(k+a)}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing, il existe  $V \subset \mathfrak{g}_{-(k+a)}$  tel qu'on ait un couplage  $[e, \mathfrak{g}_k] \times V$ . En particulier, on a  $\dim V = \dim[e, \mathfrak{g}_k] = \dim \mathfrak{g}_k$ . Comme la forme de Killing est ad-invariante, on a un couplage entre  $\mathfrak{g}_k$  et  $[e, V]$ . En particulier,  $\dim[e, V] = \dim \mathfrak{g}_k = \dim V$ . On en déduit que l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{-(k+a)} \rightarrow \mathfrak{g}_{-k}$  est surjective. Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 2.11.** *Si  $\Gamma \in GA(e)$ , alors l'application  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{g}_{\geq a}$  est surjective.*

**Proposition 2.12.** *Supposons que  $\Gamma \in GA(e)$ . Soit  $\mathfrak{n}$  un supplémentaire gradué de  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{<0}$  contenant  $\mathfrak{g}_{\leq -a}$ . Alors la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n})$  est admissible pour  $e$  si et seulement si  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . En particulier, si  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , alors la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{<0})$  est l'unique paire optimale admissible pour  $e$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$ , alors  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Réciproquement, supposons que  $\mathfrak{n}$  soit une sous-algèbre graduée de  $\mathfrak{g}$ . La condition (A1) est clairement vérifiée. Par construction, les conditions (A2) et (A4) sont satisfaites. En outre, on a

$$[\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -a-1} \subseteq \mathfrak{g}_{\leq -a},$$

d'où (A5). D'après la Remarque 2.3(3),  $[\mathfrak{n}, e]$  est inclus dans  $(\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp$ . Par suite,  $[\mathfrak{n}, e] \subset (\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp \cap [\mathfrak{g}, e]$ . Soit  $X = [Y, e]$  un élément de  $(\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp \cap [\mathfrak{g}, e]$  avec  $Y = \sum_i Y_i$  où

$Y_i \in \mathfrak{g}_i$  pour tout  $i$ . Comme  $(\mathfrak{g}_{\leq -a})^\perp = \mathfrak{g}_{<a}$ , on peut supposer  $Y \in \mathfrak{g}_{<0}$ . Écrivons alors  $Y = Y' + Y''$  avec  $Y' \in \mathfrak{n}$  et  $Y'' \in \mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$ . Ainsi,

$$X = [Y, e] = [Y', e] \in [\mathfrak{n}, e],$$



ce qui implique (A3). D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e &= \dim[\mathfrak{g}, e] = \dim[\mathfrak{g}_{\geq 0}, e] + \dim[\mathfrak{g}_{< 0}, e] \\ &= \dim \mathfrak{g}_{\geq a} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g}_{\leq -a} + \dim \mathfrak{n}\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du Corollaire 2.11, de la construction de  $\mathfrak{n}$  et de (A4). En conclusion,  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$ .  $\square$

Il n'existe pas toujours de paires optimales admissibles pour  $e$  comme l'illustre l'exemple suivant :

**Exemple 2.13.** On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{11}(\mathbb{C})$  et  $e := \sum_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ i \notin \{6,9\}}} E_{i,i+1}$ . On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple

$$\frac{1}{11} \text{diag}(73, 40, 7, -26, -59, -92, 29, -4, -37, 51, 18).$$

Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont homogènes pour cette graduation et  $e \in \mathfrak{g}_3$ . Montrons que, relativement à cette graduation, une paire admissible pour  $e$  optimale n'existe pas. Supposons que  $(\mathfrak{g}_{\leq -3}, \mathfrak{n})$  soit une paire optimale. Comme  $\mathfrak{n}$  est graduée, on peut écrire

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\leq -3} \oplus \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1} \quad \text{où} \quad \mathfrak{n}_{-2} \subset \mathfrak{g}_{-2} \text{ et } \mathfrak{n}_{-1} \subset \mathfrak{g}_{-1}.$$

On a  $\dim \mathfrak{g}^e = 25$  et, d'après (A6),  $\dim(\mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1}) = 12 = \dim \mathfrak{n}_{-2} + \dim \mathfrak{n}_{-1}$  avec  $\dim \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} = 13$ . Sachant que  $\mathfrak{g}_{< 0} \cap \mathfrak{g}^e = \mathbb{C}(E_{7,10} + E_{8,11}) \subset \mathfrak{g}_{-2}$  et  $\dim \mathfrak{g}_{< 0} \cap \mathfrak{g}^e = 1$ , et comme  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{n}_{-2} = \{0\}$ , on a  $\mathfrak{n}_{-2} \neq \mathfrak{g}_{-2}$ . Par conséquent, on a  $\dim \mathfrak{n}_{-1} = \dim \mathfrak{g}_{-1}$  et  $\mathfrak{n}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}$ . Puisque  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre graduée de  $\mathfrak{g}$  on a  $[\mathfrak{n}_{-1}, \mathfrak{n}_{-1}] \subset \mathfrak{n}_{-2}$ . Or  $\{0\} \neq \mathfrak{g}_{< 0} \cap \mathfrak{g}^e \subset [\mathfrak{n}_{-1}, \mathfrak{n}_{-1}]$ . En particulier,  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$  ce qui contredit le fait que  $(\mathfrak{g}_{\leq -3}, \mathfrak{n})$  soit une paire admissible pour  $e$ . Par suite, une paire optimale relativement à cette graduation n'existe pas.

2.4. Dans ce paragraphe,  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  désigne une  $\mathbb{Z}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$  vérifiant  $e \in \mathfrak{g}_a$  où  $a > 1$ . L'objectif de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 2.14.** La graduation  $\Gamma$  est admissible pour  $e$  si et seulement si  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ .

L'implication directe est claire d'après (A2) et (A4). On explique ici la stratégie pour montrer l'autre implication. Soient  $h_\Gamma$  l'élément semisimple de  $\mathfrak{g}$  définissant la graduation  $\Gamma$  et  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$ . On pose

$$\mathfrak{s} := \text{Vect}(e, h, f)$$

et

$$t := h_\Gamma - \frac{a}{2}h.$$

L'élément  $t$  de  $\mathfrak{g}$  est semisimple et appartient à  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ . De plus, les valeurs propres de  $\text{ad } t$  sont rationnelles. On suppose désormais que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . On va construire une paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  admissible pour  $e$  relativement à la graduation  $\Gamma$  suivant le Lemme 2.15. D'après ce lemme, la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6). Pour conclure qu'elle est  $e$ -admissible, il restera à montrer que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  vérifiant (A5).

**Lemme 2.15.** Soit  $\mathfrak{g} = \mathbf{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{P}_s$  une décomposition de  $\mathfrak{g}$  en sous-espaces de  $\mathfrak{g}$  stables par  $\mathfrak{s}$  et  $t$ , et deux à deux orthogonaux par rapport à la forme de Killing. Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , soient  $\mathfrak{m}_i$  et  $\mathfrak{n}_i$  deux sous-espaces gradués dans  $\mathbf{P}_i$  vérifiant les conditions suivantes :

- (C1):  $\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}_i \subset \mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{< 0}$  ;
- (C2):  $\mathfrak{m}_i^\perp \cap [e, \mathbf{P}_i] = [e, \mathfrak{n}_i]$  ;
- (C3):  $\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  ;
- (C4):  $\dim \mathfrak{m}_i + \dim \mathfrak{n}_i = \dim \mathbf{P}_i - \dim(\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}^e)$ .

On pose

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{m}_i \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{n}_i$$

Alors la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6) de la Définition 2.2.

*Démonstration.* La condition (A2) est vérifiée car

$$\mathfrak{g}_{\leq -a} = \bigoplus_{i=1}^s (\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}) \subset \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{m}_i \subset \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{n}_i \subset \bigoplus_{i=1}^s (\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{< 0}) = \mathfrak{g}_{< 0}.$$

En outre, comme

$$\mathfrak{m}^\perp \cap [e, \mathfrak{g}] = \bigoplus_{i=1}^s (\mathfrak{m}_i^\perp \cap [e, \mathbf{P}_i]) = \bigoplus_{i=1}^s [e, \mathfrak{n}_i] = [e, \mathfrak{n}],$$

alors (A3) est vérifiée. De plus, puisque  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \bigoplus_{i=1}^s (\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{g}^e)$ , alors  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , d'où la condition (A4). Enfin un simple calcul de dimension montre que

$$\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \sum_{i=1}^s (\dim \mathfrak{m}_i + \dim \mathfrak{n}_i) = \sum_{i=1}^s (\dim \mathbf{P}_i - \dim(\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}^e)) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e.$$

La condition (A6) s'ensuit.  $\square$

*Démonstration du Théorème 2.14.* On considère la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en composantes isotypiques de  $\mathfrak{s}$ -modules simples,

$$\mathfrak{g} = \mathbf{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{E}_r.$$

D'après le lemme de Schur, cette décomposition est orthogonale relativement à la forme de Killing. Comme  $t$  commute avec  $\mathfrak{s}$ , toujours d'après le lemme de Schur, chaque composante isotypique  $\mathbf{E}_i$  est stable sous l'action adjointe de  $t$ . Par suite, pour tout  $i$ , la composante isotypique  $\mathbf{E}_i$  se décompose en espaces propres pour  $\text{ad } t$ ,

$$\mathbf{E}_i = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{i,\lambda},$$

tels que

$$(5) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{|\mathbf{E}_{i,\lambda} \times \mathbf{E}_{i,\mu}} = 0 \text{ si } \lambda + \mu \neq 0 \text{ et } \langle \cdot, \cdot \rangle_{|\mathbf{E}_{i,\lambda} \times \mathbf{E}_{i,-\lambda}} \text{ non dégénérée.}$$

La dernière assertion signifie que  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}$  sont en couplage. Soient  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Q}$  et  $d_i$  la dimension d'un  $\mathfrak{s}$ -module simple de  $\mathbf{E}_i$ . L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h$  sur  $\mathbf{E}_i$  est donné par :

$$\{-(d_i - 1), -(d_i - 3), \dots, d_i - 3, d_i - 1\}.$$

Il s'ensuit que le plus petit poids de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  (resp. sur  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}$ ) est égal à

$$\rho_{i,\lambda} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) + \lambda \quad (\text{resp. } \rho_{i,-\lambda} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) - \lambda).$$

On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  est donné par

$$\Xi_{i,\lambda} := \{\rho_{i,\lambda} + la; 0 \leq l \leq d_i - 1\} \subset \mathbb{Q}.$$

En particulier, on a  $\rho_{i,-\lambda} = -\rho_{i,\lambda} - (d_i - 1)a$  et  $\Xi_{i,-\lambda} = -\Xi_{i,\lambda} := \{-\mu; \mu \in \Xi_{i,\lambda}\}$ . On a la décomposition

$$\mathbf{E}_{i,\lambda} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l,$$

où  $\mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  est le sous-espace propre de  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  pour  $\text{ad } h_\Gamma$  associé à la valeur propre  $\rho_{i,\lambda} + la$ . De façon analogue,

$$\mathbf{E}_{i,-\lambda} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l,$$

où  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$  est le sous-espace propre de  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}$  pour  $\text{ad } h_\Gamma$  associé à la valeur propre  $\rho_{i,-\lambda} + la$ . De plus, pour  $l, l' \in \{0, 1, \dots, d_i - 1\}$ , le couplage (5) est décrit comme suit :

$$(6) \quad \langle \mathbf{E}_{i,\lambda}^l, \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l'} \rangle = \begin{cases} \{0\} & \text{si } l + l' \neq d_i - 1; \\ \mathbb{C} & \text{si } l + l' = d_i - 1. \end{cases}$$

En particulier, les sous-espaces propres  $\mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda}^{d_i-1-l}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing. Remarquons que  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  si et seulement si

$$\frac{a}{2}(d_i - 1) + \lambda > -a \quad \text{et} \quad \frac{a}{2}(d_i - 1) - \lambda > -a,$$

i.e., si et seulement si

$$(7) \quad -\frac{a}{2}(d_i + 1) < \lambda < \frac{a}{2}(d_i + 1).$$

D'après notre hypothèse, les inégalités de (7) sont donc satisfaites. On pose

$$m_{i,\lambda} := \frac{\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}}{d_i}.$$

On a alors

$$\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}^l = m_{i,\lambda}, \quad l \in \{0, 1, \dots, d_i - 1\}.$$

Pour  $\lambda \geq 0$ , on pose

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathbf{E}_{i,\lambda} + \mathbf{E}_{i,-\lambda}.$$

On a alors la décomposition orthogonale par rapport à la forme de Killing en sous-espaces stables par  $\mathfrak{s}$  et  $t$  :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}.$$

On cherche à appliquer le Lemme 2.15 à cette décomposition pour construire une paire  $e$ -admissible. On remarque que

$$(8) \quad \dim \mathbf{V}_{i,0} = m_{i,0}d_i, \quad \dim \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^e = m_{i,0}$$

et

$$(9) \quad \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} = 2m_{i,\lambda}d_i, \quad \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = 2m_{i,\lambda} \quad \text{si } \lambda \neq 0.$$

On distingue deux cas :

**I.** Il existe  $k \in \{0, 1, \dots, d_i - 1\}$  tel que  $\rho_{i,\lambda} + ka = 0$ .

**II.** Il existe  $k \in \{-1, 0, 1, \dots, d_i - 1\}$  tel que  $\rho_{i,\lambda} + ka < 0 < \rho_{i,\lambda} + (k+1)a$ .

Ce sont les seules possibilités d'après la formule (7) car  $\rho_{i,\lambda} - a < 0 < \rho_{i,\lambda} + d_i a$ .

Cas I.. Dans ce cas,  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$ . En particulier,  $(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}) \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . On pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}.$$

Par construction, on a

$$\mathbf{n}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}.$$

De plus,

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^k \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=1}^{d_i-1-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e].$$

En outre, si  $\lambda = 0$ , alors

$$\dim \mathbf{m}_{i,0} + \dim \mathbf{n}_{i,0} = (d_i - 1)m_{i,0} = \dim \mathbf{V}_{i,0} - \dim(\mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (8). Si  $\lambda \neq 0$ , alors

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (9). Par conséquent, les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) sont vérifiées.

Cas II.. Dans ce cas,  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^k \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$ . On présente dans la Table 1 les choix de  $\mathbf{m}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{n}_{i,\lambda}$  dans chacun des sous-cas suivants :

- (a)  $k = -1$ ;
- (b)  $k = d_i - 1$ ;
- (c)  $-1 < k < d_i - 1$  et  $\lambda = 0$ ;
- (d)  $-1 < k < d_i - 1$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $\rho_{i,\lambda} + ka < -\rho_{i,\lambda} - (k+1)a$ ;
- (e)  $-1 < k < d_i - 1$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $-\rho_{i,\lambda} - (k+1)a < \rho_{i,\lambda} + ka$ .

Cas II	$\mathbf{m}_{i,\lambda}$	$\mathbf{n}_{i,\lambda}$
(a)	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-2} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	
(b)	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	
(c)	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,0}^l$	$V_{i,[0]} \cap \mathfrak{g}_{<0}$
(d)	$\bigoplus_{l=0}^k \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=0}^{d_i-3-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	
(e)	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	

TABLE 1. **Cas II.**

Dans chacun de ces sous-cas, par construction (cf. Table 1),

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathbf{m}_{i,\lambda} \subset \mathbf{n}_{i,\lambda} \subset \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}.$$

**Sous-cas (a).** On a

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e],$$

et, d'après (9),

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e).$$

**Sous-cas (b).** On a

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e],$$

et, d'après (9),

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e).$$

**Sous-cas (c).** On a

$$\mathbf{m}_{i,0}^\perp \cap [e, \mathbf{V}_{i,0}] = \bigoplus_{l=1}^{k+1} \mathbf{E}_{i,0}^l = [e, \mathbf{n}_{i,0}],$$

et, d'après (8),

$$\dim \mathbf{m}_{i,[0]} + \dim \mathbf{n}_{i,[0]} = (d_i - 1)m_{i,0} = \dim V_{i,[0]} - \dim(V_{i,[0]} \cap \mathfrak{g}^e).$$

**Sous-cas (d).** Si  $\rho_{i,\lambda} + ka < -\rho_{i,\lambda} - (k+1)a$  on a alors

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{k+1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l \oplus \bigoplus_{l=1}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e].$$

**Sous-cas (e).** On procède de manière analogue au sous-cas (d). On a en particulier d'après (9),

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e).$$

Par conséquent, les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) sont vérifiées dans tous les sous-cas. De plus,  $\mathbf{m}_{i,\lambda} \subset \mathbf{n}_{i,\lambda} \subset \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}$ .

Conclusion. Posons

$$\mathbf{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{n}_{i,\lambda}.$$

Les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6) sont vérifiées d'après le Lemme 2.15. Il reste à vérifier que  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  qui vérifient la condition (A5). On a  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathbf{m} \subset \mathbf{n} \subset \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}} \subset \mathfrak{g}_{<0}$ . Ainsi,

$$[\mathbf{m}, \mathbf{m}] \subset [\mathbf{n}, \mathbf{m}] \subset [\mathbf{n}, \mathbf{n}] \subset [\mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}] \subset \mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathbf{m} \subset \mathbf{n}.$$

Il s'ensuit que  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  telles que  $[\mathbf{n}, \mathbf{m}] \subset \mathbf{m}$ . Par conséquent, la paire  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  est admissible pour  $e$ . Ceci achève la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 2.16.** Comme la graduation  $\Gamma$  est entière, il en résulte que  $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Pour  $a$  fixé le nombre de graduations admissibles pour  $e$  est fini d'après les inégalités (7).

### 3. $W$ -ALGÈBRES FINIES ASSOCIÉES AUX PAIRES ADMISSIBLES

Dans cette section, on conserve les notations de la section précédente. Plus précisément,  $e$  est un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et  $\chi := \kappa(e)$  où  $\kappa$  est l'isomorphisme de Killing. On fixe une paire  $e$ -admissible  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  de  $\mathfrak{g}$  relativement à une  $\mathbb{Z}$ -gradation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  avec  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$ . Le groupe adjoint  $G$  opère dans  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^*$  via l'opération adjointe et l'opération coadjointe respectivement. Pour  $g \in G$ ,  $x \in \mathfrak{g}$  et  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , on note  $g(x)$  et  $g(\xi)$  les images de  $x$  et  $\xi$  par  $g$  pour ces opérations respectives.

3.1. Si  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , on note  $U(\mathfrak{a})$  l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{a}$ . D'après la Remarque 2.3(3), la restriction à  $\mathfrak{m}$  de  $\chi$  est un caractère de  $\mathfrak{m}$ . Ce dernier s'étend en une représentation  $\chi : U(\mathfrak{m}) \rightarrow \mathbb{C}$  de  $U(\mathfrak{m})$  et on désigne par  $\mathbb{C}_\chi$  le  $U(\mathfrak{m})$ -module à gauche correspondant. La multiplication à droite par un élément de  $\mathfrak{m}$  induit une structure de  $U(\mathfrak{m})$ -module à droite sur  $U(\mathfrak{g})$ . Soit  $I(\mathfrak{m})$  l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par les éléments  $x - \chi(x)$ , pour  $x \in \mathfrak{m}$ . On pose

$$Q(\mathfrak{m}) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_\chi.$$

Alors  $Q(\mathfrak{m})$  est isomorphe à  $U(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{m})$  en tant que  $U(\mathfrak{g})$ -modules. L'opération adjointe de  $\mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{g}$  s'étend de façon unique en une opération  $\theta$  de  $\mathfrak{n}$  dans  $U(\mathfrak{g})$ . L'idéal  $I(\mathfrak{m})$  est stable sous cette action de  $\mathfrak{n}$ . En particulier, ceci induit une structure de  $\mathfrak{n}$ -module sur  $Q(\mathfrak{m})$  donnée par

$$\theta(x)(u + I(\mathfrak{m})) = \theta(x)(u) + I(\mathfrak{m}),$$

pour  $x \in \mathfrak{n}$  et  $u \in U(\mathfrak{g})$ .

On pose

$$(10) \quad \begin{aligned} H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) &= \{u + I(\mathfrak{m}) \in Q(\mathfrak{m}); \theta(x)(u) \in I(\mathfrak{m}) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{n}\} \\ &= \{u + I(\mathfrak{m}) \in Q(\mathfrak{m}); I(\mathfrak{m})u \subset I(\mathfrak{m})\}. \end{aligned}$$

Autrement dit,  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est le sous-espace de  $Q(\mathfrak{m})$  formé des éléments invariants par  $\mathfrak{n}$ . Pour  $u + I(\mathfrak{m}), v + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ , on a  $uv + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . En particulier,  $(u + I(\mathfrak{m}))(v + I(\mathfrak{m})) = uv + I(\mathfrak{m})$  définit une structure d'algèbre sur  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ .

**Remarque 3.1.** Lorsque  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ , d'après (10), l'application

$$\Phi : H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \rightarrow \text{End}_{U(\mathfrak{g})} Q(\mathfrak{m})^{\text{op}}$$

donnée par  $\Phi(u + I(\mathfrak{m}))(v + I(\mathfrak{m})) = vu + I(\mathfrak{m})$  où  $u + I(\mathfrak{m}) \in H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $v + I(\mathfrak{m}) \in Q(\mathfrak{m})$  est bien définie et c'est un isomorphisme d'algèbres.

3.2. Soient  $(e, h, f)$  un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{s}$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire de  $[\mathfrak{n}, e]$  dans  $\mathfrak{m}^\perp$ .

**Lemme 3.2.** On a

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, e] \oplus \mathfrak{s}.$$

*Démonstration.* D'après la condition (A3) de la Définition 2.2,  $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{g}, e] = \{0\}$ . D'autre part, d'après la condition (A4),  $\dim \mathfrak{n} = \dim [\mathfrak{n}, e]$ . Ainsi, on obtient

$$\dim \mathfrak{s} + \dim [\mathfrak{g}, e] = \dim \mathfrak{m}^\perp - \dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e = \dim \mathfrak{g},$$

grâce à la condition (A6). Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Remarque 3.3.** Lorsque  $\Gamma$  est la gradation de Dynkin associée à  $h$ , on montre en reprenant les arguments de [11, Paragraph 2.3] que  $\mathfrak{g}^f$  est un supplémentaire gradué de  $[\mathfrak{n}, e]$  dans  $\mathfrak{m}^\perp$ , donc  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^f$  convient dans ce cas.

On pose

$$\mathcal{S} := \chi + \kappa(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{g}^*.$$

Rappelons que  $h_\Gamma$  est l'élément semisimple définissant  $\Gamma$ . Soit  $\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  le sous-groupe à un paramètre associé à  $\text{ad } h_\Gamma$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g} ; \gamma(t)(x) = t^j x, \text{ pour tout } t \in \mathbb{C}^*\}.$$

On définit une opération  $\rho$  du groupe  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathfrak{g}$  en posant pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$  et  $x \in \mathfrak{g}$ ,

$$\rho(t)(x) = t^a \gamma(t^{-1})(x).$$

Pour  $x \in \mathfrak{g}_j$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a  $\rho(t)(x) = t^{-j+a}x$ . En particulier, comme  $e \in \mathfrak{g}_a$ ,  $\rho(t)(e) = e$ .

**Lemme 3.4.** *L'opération  $\rho$  stabilise  $e + \mathfrak{s}$  et  $e + \mathfrak{m}^\perp$ . De plus, elle est contractante dans ces deux variétés, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t)(e + x) = e$  pour tout  $x \in \mathfrak{m}^\perp$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{m}^\perp$  sont des sous-espaces gradués de  $\mathfrak{g}$ , ils sont  $\text{ad } h_\Gamma$ -stables donc  $\rho$ -stables. D'autre part,  $\rho(t)(e) = e$ . On en déduit que  $\rho$  stabilise  $e + \mathfrak{s}$  et  $e + \mathfrak{m}^\perp$ . De plus, d'après la Remarque 2.3(2), on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t)(e + x) = e$  pour tout  $x \in \mathfrak{m}^\perp$ .  $\square$

**Théorème 3.5.** *La variété affine  $\mathcal{S} = \chi + \kappa(\mathfrak{s})$  (resp.  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ ) est transverse aux orbites coadjointes de  $\mathfrak{g}^*$ . Précisément, pour tout  $\xi \in \mathcal{S}$  (resp.  $\xi \in \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ ), on a  $T_\xi(G \cdot \xi) + T_\xi(\mathcal{S}) = \mathfrak{g}^*$  (resp.  $T_\xi(G \cdot \xi) + T_\xi(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)) = \mathfrak{g}^*$ ).*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord le théorème pour  $\mathcal{S}$ .

On identifie  $\mathfrak{g}^*$  à  $\mathfrak{g}$  via l'isomorphisme  $\kappa$ . Pour tout  $x \in e + \mathfrak{s}$ , on a  $T_x(G \cdot x) = [\mathfrak{g}, x]$  et  $T_x(e + \mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ . Il suffit donc de montrer que pour tout  $x \in e + \mathfrak{s}$  on a  $[\mathfrak{g}, x] + \mathfrak{s} = \mathfrak{g}$ . Soient alors  $x \in e + \mathfrak{s}$  et

$$\eta : G \times (e + \mathfrak{s}) \rightarrow \mathfrak{g}$$

l'application donnée par l'opération adjointe. Pour tout  $(g, X) \in G \times (e + \mathfrak{s})$ ,  $v \in T_g G$  et  $w \in \mathfrak{s}$ , l'application différentielle de  $\eta$  en  $(g, X)$  est donnée par (cf. e.g. [24, Proposition 29.1.4]) :

$$(11) \quad d\eta_{(g,X)}(v, w) = g([v, X]) + g(w).$$

Ainsi  $d\eta_{(\text{id}, e)}(v, w) = [v, e] + w$ . On déduit que l'application  $d\eta_{(\text{id}, e)}$  est surjective car  $[\mathfrak{g}, e] + \mathfrak{s} = \mathfrak{g}$  (cf. Lemme 3.2). Par conséquent,  $d\eta_{(\text{id}, X)}$  est surjective pour tout  $X$  dans un voisinage ouvert  $V$  de  $e$  dans  $e + \mathfrak{s}$ . Comme le morphisme  $\eta$  est  $G$ -équivariant pour l'action donnée par  $g \cdot (g', x) = (gg', x)$ , on déduit que l'application  $d\eta_{(g,X)}$  est surjective pour tous  $X \in V$  et  $g \in G$ . D'après (11), il vient que

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, X] + \mathfrak{s}$$

pour tout  $X \in V$ . On pose  $Y := \{\rho(t)(x) ; t \in \mathbb{C}^*\}$  et on note  $Z$  l'adhérence de  $Y$  dans  $e + \mathfrak{s}$ . Comme l'opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $e + \mathfrak{s}$  est contractante,  $e$  appartient à  $Z$ . L'intersection  $V \cap Z$  est donc une partie ouverte non vide (elle contient  $e$ ) de  $Z$ . Or  $Z$  est une variété irréductible de  $e + \mathfrak{s}$  et  $Y$  est un ensemble constructible dense de  $Z$ . Ainsi,  $V \cap Y \neq \emptyset$ .

Soient  $X \in V$  et  $t \in \mathbb{C}^*$  tels que  $X = \rho(t)(x)$ . Comme  $\gamma(t^{-1})$  est un automorphisme de Lie de  $\mathfrak{g}$ , on a

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}, X] &= [\mathfrak{g}, \rho(t)(x)] = [\mathfrak{g}, t^a \gamma(t^{-1})(x)] = t^a [\mathfrak{g}, \gamma(t^{-1})(x)] \\ &= t^a [\gamma(t^{-1})(\mathfrak{g}), \gamma(t^{-1})(x)] = t^a \gamma(t^{-1})([\mathfrak{g}, x]) = \rho(t)([\mathfrak{g}, x]). \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, X] + \mathfrak{s} = \rho(t)([\mathfrak{g}, x] + \mathfrak{s})$  car  $\rho(t)(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ . Par suite on a  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, x] + \mathfrak{s}$  ce qui complète la démonstration du théorème pour  $\mathcal{S}$ . Les mêmes arguments s'appliquent pour  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  d'après la Remarque 2.3 et le Lemme 3.4.  $\square$

Soit  $N$  le sous-groupe unipotent de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}$ .

**Lemme 3.6.** *L'image de l'application adjointe  $N \times (e + \mathfrak{m}^\perp) \rightarrow \mathfrak{g}$  est contenue dans  $e + \mathfrak{m}^\perp$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{g}$ , le groupe  $N$  est engendré par les éléments  $\exp(\text{ad } x)$  où  $x$  parcourt  $\mathfrak{n}$ . Il suffit de montrer que pour tout  $x \in \mathfrak{n}$  et tout  $y \in \mathfrak{m}^\perp$ ,  $\exp(\text{ad } x)(e + y)$  appartient à  $e + \mathfrak{m}^\perp$ . Soient  $x \in \mathfrak{n}$  et  $y \in \mathfrak{m}^\perp$ . On a

$$\exp(\text{ad } x)(e + y) = e + y + [x, e + y] + \cdots + \frac{1}{k!}(\text{ad } x)^k(e + y)$$

pour  $k$  suffisamment grand car  $\text{ad } x$  est nilpotent. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(\text{ad } x)^i e \in \mathfrak{m}^\perp$  d'après la Remarque 2.3. D'autre part, comme  $y \in \mathfrak{m}^\perp$ , on a  $\langle m, [x, y] \rangle = \langle [m, x], y \rangle = 0$  pour tout  $m \in \mathfrak{m}$  d'après la condition (A5) de la Définition 2.2, d'où  $[x, y] \in \mathfrak{m}^\perp$ . Ainsi,  $(\text{ad } x)^i y \in \mathfrak{m}^\perp$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $\exp(\text{ad } x)(e + y) \in e + \mathfrak{m}^\perp$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

Grâce au Lemme 3.6, on définit par restriction à  $N \times (e + \mathfrak{s})$  de l'application adjointe  $N \times (e + \mathfrak{m}^\perp) \rightarrow \mathfrak{g}$ , l'application

$$\alpha : N \times (e + \mathfrak{s}) \longrightarrow e + \mathfrak{m}^\perp.$$

On définit une opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $N \times (e + \mathfrak{s})$  en posant :

$$t.(g, x) := (\gamma(t^{-1})g\gamma(t), \rho(t)(x)),$$

pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $g \in N$  et  $x \in e + \mathfrak{s}$ . L'opération est bien définie. En effet,  $\gamma(t^{-1})(\exp \text{ad } x)\gamma(t) = \exp \text{ad } (\gamma(t^{-1})(x))$  appartient à  $N$  pour tout  $x \in \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{n}$  étant gradué.

**Lemme 3.7.** (i) *Pour tout  $(g, x) \in N \times (e + \mathfrak{s})$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow 0} t.(g, x) = (\mathbf{1}_G, e)$ .*

(ii) *Le morphisme  $\alpha$  est  $\mathbb{C}^*$ -équivariant où l'opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $e + \mathfrak{m}^\perp$  est donnée par  $\rho$ .*

*Démonstration.* (i) Comme l'opération  $\rho$  de  $\mathbb{C}^*$  dans  $e + \mathfrak{s}$  est contractante (cf. Lemme 3.4) et que  $\mathfrak{n}$  est nilpotente, il suffit de montrer que  $\gamma(t^{-1})(\exp \text{ad } x)\gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathbf{1}_G$  pour tout  $x \in \mathfrak{n}$ . Soit  $x \in \mathfrak{n}$ . D'après la troisième inclusion de (A2), on a  $\gamma(t^{-1})(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , d'où

$$\gamma(t^{-1})(\exp \text{ad } x)\gamma(t) = \exp \text{ad } (\gamma(t^{-1})(x)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \exp(0) = \mathbf{1}_G.$$

(ii) Pour  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $g \in G$  et  $x \in e + \mathfrak{m}^\perp$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha(t.(g, x)) &= \alpha(\gamma(t^{-1})g\gamma(t), \rho(t)(x)) = \gamma(t^{-1})g\gamma(t)(\rho(t)(x)) \\ &= \gamma(t^{-1})g\gamma(t)(t^a\gamma(t^{-1})(x)) = t^a\gamma(t^{-1})(g(x)) \\ &= \rho(t)(g(x)) = \rho(t)\alpha(g, x). \end{aligned}$$

$\square$

**Théorème 3.8.** *L'application*

$$\alpha : N \times (e + \mathfrak{s}) \longrightarrow e + \mathfrak{m}^\perp$$

*est un isomorphisme de variétés affines.*



*Démonstration.* Rappelons l'énoncé général suivant formulé dans [11, Proof of Lemma 2.1] :

*Un morphisme équivariant  $\beta : X_1 \rightarrow X_2$  entre deux  $\mathbb{C}^*$ -variétés affines lisses munies d'opérations contractantes de  $\mathbb{C}^*$  qui induit un isomorphisme entre les espaces tangents des points fixes par  $\mathbb{C}^*$  est un isomorphisme.*

D'après le Lemme 3.7, il suffit de montrer que la différentielle de  $\alpha$  au point  $(\mathbf{1}_G, e)$  induit un isomorphisme entre l'espace tangent  $T_{(\mathbf{1}_G, e)}(N \times (e + \mathfrak{s})) = \mathfrak{n} \times \mathfrak{s}$  de  $N \times (e + \mathfrak{s})$  en  $(\mathbf{1}_G, e)$  et l'espace tangent  $T_e(e + \mathfrak{m}^\perp) = \mathfrak{m}^\perp$  de  $e + \mathfrak{m}^\perp$  en  $e$ . En effet, les ensembles des points fixes par  $\mathbb{C}^*$  de  $N \times (e + \mathfrak{s})$  et  $e + \mathfrak{m}^\perp$  sont  $\{(\mathbf{1}_G, e)\}$  et  $\{e\}$  respectivement.

On a  $d\alpha_{(\mathbf{1}_G, e)}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{s}) = [\mathfrak{n}, e] + \mathfrak{s}$  par un calcul similaire à celui de la démonstration du Théorème 3.5. Comme  $[\mathfrak{n}, e] + \mathfrak{s} = \mathfrak{m}^\perp$ , l'application  $d\alpha_{(\mathbf{1}_G, e)}$  est surjective. Par conséquent, c'est un isomorphisme entre  $\mathfrak{n} \times \mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{m}^\perp$  pour des raisons de dimension. Le théorème s'ensuit.  $\square$

En plus de cette propriété importante de transversalité, la variété  $\mathcal{S}$  admet une structure de Poisson, tout comme la tranche de Slodowy. Rappelons tout d'abord que  $\mathfrak{g}^*$  admet une structure de Poisson canonique donnée par

$$\{F, G\}(\xi) := \xi([d_\xi F, d_\xi G])$$

pour tous  $F, G \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  et  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  où  $d_\xi F \in (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ . Toute orbite coadjointe dans  $\mathfrak{g}^*$  admet une structure naturelle de variété symplectique [8, Proposition 1.1.5].

**Proposition 3.9.** *La variété  $\mathcal{S} \subset \mathfrak{g}^*$  hérite de la structure de Poisson sur  $\mathfrak{g}^*$ .*

*Démonstration.* D'après la Proposition 3.10 et la Remarque 3.11 de [25] il suffit de vérifier les conditions suivantes :

- (i)  $\mathcal{S}$  est transverse aux orbites coadjointes de  $\mathfrak{g}^*$ .
- (ii) Pour tout  $\xi \in \mathcal{S}$ , on a

$$\#_\xi \text{Ann}(T_\xi \mathcal{S}) \cap T_\xi(\mathcal{S}) = \{0\},$$

où  $\text{Ann}(T_\xi \mathcal{S})$  est l'annulateur de  $T_\xi \mathcal{S} \simeq \kappa(\mathfrak{s})$  dans  $(T_\xi \mathfrak{g}^*)^* \simeq (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$  et

$$\#_\xi : (T_\xi \mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow T_\xi \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*, \alpha \longmapsto \xi([\alpha, \cdot]).$$

Tout d'abord, la condition (i) est satisfaite grâce au Théorème 3.5. Il reste à montrer la condition (ii). On a

$$\text{Ann}(T_\xi \mathcal{S}) = \{x \in \mathfrak{g} ; \eta(x) = 0, \text{ pour tout } \eta \in \kappa(\mathfrak{s})\} = \mathfrak{s}^\perp.$$

Par conséquent,

$$\#_\xi \text{Ann}(T_\xi \mathcal{S}) = \langle \kappa^{-1}(\xi), [\mathfrak{s}^\perp, \cdot] \rangle = \langle [\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp], \cdot \rangle = \kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp]).$$

On est alors amené à vérifier que l'intersection,

$$\kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp]) \cap T_\xi(\mathcal{S}) = \kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp]) \cap \kappa(\mathfrak{s}) = \kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s})$$

est nulle. La proposition s'ensuit grâce au Lemme 3.10 ci-dessous.

**Lemme 3.10.** *Soit  $\xi \in \mathcal{S}$ . Alors  $[\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s} = \{0\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y \subset e + \mathfrak{s}$  l'ensemble des  $y \in e + \mathfrak{s}$  vérifiant  $[y, \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s} \neq \{0\}$ . Comme  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{s}^\perp$  sont ad $h_\Gamma$ -stables, on a pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\gamma(t^{-1})([y, \mathfrak{s}^\perp]) \cap \mathfrak{s} = [\gamma(t^{-1})y, \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s},$$

d'où  $\rho(t)([y, \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s}) = [\rho(t)y, \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s}$ . Par suite,  $\rho$  stabilise  $Y$ . D'autre part, d'après le Lemme 3.2,  $e$  appartient à  $(e + \mathfrak{s}) \setminus Y$ . Ainsi, en tout point  $y'$  dans un voisinage ouvert  $V$  de  $e$  dans  $e + \mathfrak{s}$ , on a  $y' \in (e + \mathfrak{s}) \setminus Y$ .

Supposons que  $Y \neq \emptyset$  et soit  $y \in Y$ . Comme  $\rho$  stabilise  $Y$ , on a  $\rho(t)y \in Y$  pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ . Or, pour  $t$  suffisamment petit,  $\rho(t)y$  appartient au voisinage ouvert  $V$  de  $e$  d'après le Lemme 3.4, d'où la contradiction.  $\square$

$\square$

3.3. Soient  $\mathfrak{s}$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{m}^\perp$  supplémentaire de  $[\mathfrak{n}, e]$  et  $\mathcal{S} := \chi + \kappa(\mathfrak{s})$ . On note plus simplement  $H$  l'algèbre  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  définie par (10) (cf. §3.1). De la même manière, on désigne par  $I$  et  $Q$  l'idéal  $I(\mathfrak{m})$  et le quotient  $Q(\mathfrak{m})$  respectivement.

Soit  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $\mathfrak{g}^*$ . L'isomorphisme canonique entre l'algèbre symétrique  $S(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  envoie un monôme  $x_1 \cdots x_j$  de  $S(\mathfrak{g})$  sur l'élément  $F_{x_1 \cdots x_j}$  défini par  $F_{x_1 \cdots x_j}(\xi) = \xi(x_1) \cdots \xi(x_j)$  pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . On identifie désormais  $S(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  via cet isomorphisme. L'opération adjointe de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$  induit une opération, encore notée  $\text{ad}$ , de  $\mathfrak{g}$  dans  $S(\mathfrak{g})$  qui se transporte en une opération de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ .

On définit une opération  $\rho^\sharp$  du groupe  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathfrak{g}^*$  en posant pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  :

$$\rho^\sharp(t)(\xi) := t^{-a}\gamma(t)(\xi).$$

Remarquons que  $\rho^\sharp$  est l'opération contragrédiente de  $\rho$ . Ceci induit une opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  donnée par :

$$\rho^\sharp(t)(F)(\xi) := F(\rho^\sharp(t^{-1})(\xi)),$$

pour tous  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $F \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  et  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . On pose, pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k) := \{F \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \mid \rho^\sharp(t)(F) = t^k F, \text{ pour tout } t \in \mathbb{C}^*\}.$$

**Lemme 3.11.** *Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le sous-espace  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$  de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est engendré par les monômes de la forme  $x = x_1 \cdots x_j$  vérifiant  $(\text{ad } h_\Gamma)x = ix$  et  $i + aj = k$ .*

*Démonstration.* Soit  $x = x_1 \cdots x_j$  un monôme de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  vérifiant  $(\text{ad } h_\Gamma)x = ix$  et  $i + aj = k$ . Pour  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a :

$$\rho^\sharp(t)(x)(\xi) = \prod_{l=1}^j (\rho^\sharp(t^{-1})(\xi))(x_l) = \prod_{l=1}^j (t^a \gamma(t^{-1})(\xi))(x_l) = t^{aj} \xi(\gamma(t)(x)).$$

Comme  $(\text{ad } h_\Gamma)(x) = ix$ , on a  $\gamma(t)(x) = t^i x$ . On en déduit que  $\rho^\sharp(t)(x) = t^{i+aj} x$ , i.e.,  $x \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](i + aj) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$ .

D'autre part, un élément  $x$  de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$  s'écrit  $x = \sum_l x_l$  où  $x_l \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est tel que  $(\text{ad } h_\Gamma)(x_l) = i_l x_l$  et  $x_l = x_{1,l} \cdots x_{j_l,l}$  avec  $x_{t,l} \in \mathfrak{g}$  et  $i_l + aj_l = k$  pour tout  $l$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Lemme 3.12.** (i) *Pour  $x \in \mathfrak{g}_j$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a  $\rho^\sharp(t)\kappa(x) = t^{j-a}\kappa(x)$ . En particulier, comme  $e \in \mathfrak{g}_a$ , on a  $\rho^\sharp(t)\chi = \chi$ .*

(ii) *Les sous-espaces  $\kappa(\mathfrak{s})$  et  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  sont stables par  $\rho^\sharp$  et les poids de  $\rho^\sharp$  sur  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp) \supset \kappa(\mathfrak{s})$  sont des entiers strictement négatifs.*

*Démonstration.* (i) Pour  $x \in \mathfrak{g}_j$ , on a  $\rho^\sharp(t)\kappa(x) = t^{-a}\gamma(t)\kappa(x) = t^{-a}\kappa(\gamma(t)(x)) = t^{j-a}\kappa(x)$ .

(ii) Les sous-espaces  $\kappa(\mathfrak{s})$  et  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  sont stables par  $\rho^\sharp$  car  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{m}^\perp$  sont stables par  $\text{ad } h_\Gamma$ . Comme  $\mathfrak{m}^\perp \subset \bigoplus_{j \leq a-1} \mathfrak{g}_j$  (cf. Remarque 2.3), les poids sur  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  sont les entiers  $j - a$ , pour  $j \leq a - 1$ . Ce sont donc des entiers strictement négatifs.  $\square$

D'après le Lemme 3.12, l'application  $\rho^\sharp$  induit une opération de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}[\mathcal{S}] = \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{s})]$  et dans  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ . Ceci définit une structure d'algèbres graduées sur ces deux algèbres.

**Lemme 3.13.** *La graduation sur  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$  (resp. sur  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ ) est positive au sens où  $\mathbb{C}[\mathcal{S}](k) = 0$  (resp.  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)](k) = 0$ ) pour tout  $k < 0$  et  $\mathbb{C}[\mathcal{S}](0) \simeq \mathbb{C}$  (resp.  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)](0) \simeq \mathbb{C}$ ).*

*Démonstration.* Commençons par démontrer le lemme pour  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ . On fixe une base  $(z_1, \dots, z_s)$  de  $\mathfrak{s}$  où  $z_i \in \mathfrak{g}_{d_i}$  avec  $d_i \in \mathbb{Z}$ . D'après la Remarque 2.3, on a  $d_i \leq a - 1$ . Les éléments  $(e, z_1, \dots, z_s)$  sont alors linéairement indépendants. On pose  $z_0 := e$  et on complète cet ensemble par des éléments homogènes relativement à la graduation  $\Gamma$  en une base  $(z_0, z_1, \dots, z_s, z_{s+1}, \dots, z_r)$  de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $(\varphi_0, \dots, \varphi_r)$  la base duale de  $(\kappa(z_0), \dots, \kappa(z_r))$ . Alors  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = \mathbb{C}[\varphi_0, \dots, \varphi_r]$  et, pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ , on a

$$\rho^\sharp(t)(\varphi_i)\left(\sum_{j=0}^r c_j \kappa(z_j)\right) = \varphi_i(t^{-d_i+a} c_i \kappa(z_i)), \text{ avec } c_i \in \mathbb{C}.$$

Par suite,  $\rho^\sharp(t)(\varphi_i) = t^{-d_i+a} \varphi_i$ . Soit  $\mathcal{I}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  l'idéal des fonctions polynomiales s'annulant sur  $\mathcal{S}$ . Alors

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}) = \{F \in \mathbb{C}[\varphi_0, \dots, \varphi_r] ; F(\kappa(e+x)) = 0, \forall x \in \mathfrak{s}\}.$$

Par suite, on constate que  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  est l'idéal de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  engendré par les fonctions  $\varphi_0 - 1, \varphi_{s+1}, \dots, \varphi_r$ . Alors,  $\mathbb{C}[\mathcal{S}] = \mathbb{C}[\psi_1, \dots, \psi_s]$  où  $\psi_i$  désigne la classe de  $\varphi_i$  modulo  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  pour tout  $i$ . Remarquons que  $\mathcal{I}(\mathcal{S})$  est stable par  $\rho^\sharp$ . En effet, pour  $F \in \mathcal{I}(\mathcal{S})$ ,  $\rho^\sharp(t)(F)(\xi) = F(\rho^\sharp(t^{-1})(\xi)) = 0$  car  $\rho^\sharp(t^{-1})(\xi) \in \mathcal{S}$ . Comme pour  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\psi_i$  est de poids  $-d_i + a \geq 1$  relativement à l'opération  $\rho^\sharp$  car  $d_i \leq a - 1$ . On en déduit que la graduation sur  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$  est positive. De plus,  $F \in \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  est de poids zéro si et seulement si  $F$  est constante.

Les mêmes arguments s'appliquent pour  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  car  $\mathfrak{m}^\perp \subset \bigoplus_{j \leq a-1} \mathfrak{g}_j$  (cf. Remarque 2.3).  $\square$

Soit  $(U^j(\mathfrak{g}))_j$  la filtration standard de  $U(\mathfrak{g})$ . L'opération adjointe de  $h_\Gamma$  dans  $\mathfrak{g}$  s'étend de façon unique en une dérivation sur  $U(\mathfrak{g})$ . On pose pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $U_i(\mathfrak{g}) := \{x \in U(\mathfrak{g}) ; (\text{ad } h_\Gamma)(x) = ix\}$ . Soit  $\mathcal{F}$  la filtration croissante de  $U(\mathfrak{g})$  définie par,

$$\mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) := \sum_{i+a_j \leq k} U_i(\mathfrak{g}) \cap U^j(\mathfrak{g}), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pour  $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $x \in U^r(\mathfrak{g})$  (resp.  $x \in U_r(\mathfrak{g})$ ) et  $y \in U^s(\mathfrak{g})$  (resp.  $y \in U_s(\mathfrak{g})$ ), on remarque que  $[x, y] \in U^{r+s-1}(\mathfrak{g})$  (resp.  $[x, y] \in U_{r+s}(\mathfrak{g})$ ). Si  $x \in \mathcal{F}_r U(\mathfrak{g})$  et  $y \in \mathcal{F}_s U(\mathfrak{g})$ , alors on a  $[x, y] \in \mathcal{F}_{r+s-a} U(\mathfrak{g})$ . On désigne par  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  l'algèbre graduée de  $U(\mathfrak{g})$  par rapport à la filtration  $\mathcal{F}$ , i.e.,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_k \text{gr}_{\mathcal{F},k} U(\mathfrak{g})$  où  $\text{gr}_{\mathcal{F},k} U(\mathfrak{g}) := \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) / \mathcal{F}_{k-1} U(\mathfrak{g})$ . D'après le Lemme 3.11, on a un isomorphisme d'algèbres graduées  $\mathfrak{g}$ -équivariant entre  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  qui envoie  $\text{gr}_{\mathcal{F},k} U(\mathfrak{g})$  sur  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$ .

**Remarque 3.14.** *Comme l'algèbre graduée  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  est commutative, elle admet une structure de Poisson donnée comme suit. Pour  $u_1 \in \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g}) / \mathcal{F}_{k-1} U(\mathfrak{g})$  et  $u_2 \in \mathcal{F}_l U(\mathfrak{g}) / \mathcal{F}_{l-1} U(\mathfrak{g})$ , soit  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) un représentant de  $u_1$  dans  $\mathcal{F}_k U(\mathfrak{g})$  (resp.  $u_2$  dans  $\mathcal{F}_l U(\mathfrak{g})$ ). Alors*

$$\{u_1, u_2\} := v_1 v_2 - v_2 v_1 \mod \mathcal{F}_{k+l-a-2} U(\mathfrak{g}).$$

*En particulier, l'isomorphisme entre  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est un morphisme d'algèbres de Poisson.*

Rappelons que  $Q$  est le quotient  $U(\mathfrak{g})/I$ . Soit  $\pi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow Q$  l'application quotient et posons

$$\mathcal{F}_k Q := \pi(\mathcal{F}_k U(\mathfrak{g})), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ceci définit une structure de  $U(\mathfrak{g})$ -module filtré sur  $Q$ . De plus, pour tout  $k < 0$ , on a  $\mathcal{F}_k Q = \{0\}$ .

Soit  $\text{gr}(\pi) : \text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q$  le morphisme gradué surjectif associé à  $\pi$ , i.e., pour  $u \in \mathcal{F}_k U(\mathfrak{g})$ , on a  $\text{gr}(\pi)(u + \mathcal{F}_{k-1} U(\mathfrak{g})) = \pi(u) + \mathcal{F}_{k-1} Q$ . On a la suite exacte de  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$ -modules

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} I \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \rightarrow 0.$$

En particulier,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  est un idéal de  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$ . On en déduit que  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q$  admet une structure d'algèbre avec  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q \simeq \text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) / \text{gr}_{\mathcal{F}} I$  (cf. e.g. [24, Proposition 7.5.3]). De plus,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  est le noyau de  $\text{gr}(\pi)$ .

Soit  $\mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp))$  l'idéal de  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  formé des fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{g}^*$  qui s'annulent sur  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ .

**Lemme 3.15.** *L'image du noyau  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  de  $\text{gr}(\pi)$  par l'isomorphisme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  est  $\mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp))$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{m}$  est ad  $h_\Gamma$ -stable, il existe une base

$$(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_r)$$

de  $\mathfrak{g}$ , avec  $y_i \in \mathfrak{g}_{d_i}$  ( $d_i \in \mathbb{Z}$ ), telle que  $(y_1, \dots, y_m)$  soit une base de  $\mathfrak{m}$ . Soit  $i \in \{1, \dots, r\}$ . On pose,

$$\tilde{y}_i := y_i - \chi(y_i).$$

D'après la condition (A2), on a  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \subset \mathfrak{m}$ . Par suite, pour  $i > m$ , on a  $d_i \geq -a + 1$  et  $\chi(y_i) = \langle e, y_i \rangle = 0$  car  $e \in \mathfrak{g}_a$ . Par conséquent,  $\tilde{y}_i = y_i \in U^1(\mathfrak{g}) \cap U_{d_i}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{F}_{a+d_i} U(\mathfrak{g})$ . Soit  $(y_1^*, \dots, y_r^*)$  la base duale de  $(y_1, \dots, y_r)$ . On a

$$(12) \quad \chi = \sum_{j=1}^m \chi(y_j) y_j^* + \sum_{j=m+1}^r \chi(y_j) y_j^* = \sum_{j=1}^m \chi(y_j) y_j^*.$$

En outre,  $\ker \text{gr}(\pi) = \text{gr}_{\mathcal{F}} I$  est engendré par les éléments  $\tilde{y}_i + \mathcal{F}_{a+d_i-1} U(\mathfrak{g})$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Soit  $J$  l'image de  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  par l'isomorphisme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ . Alors  $J$  est engendré par les éléments  $\tilde{y}_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , et

$$Z(J) = \left\{ \sum_{j=1}^m \chi(y_j) y_j^* + \sum_{j=m+1}^r \lambda_j y_j^* \in \mathfrak{g}^*; \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \right\}$$

est l'ensemble des zéros communs de  $J$  dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ . Comme  $(y_{m+1}^*, \dots, y_r^*)$  est une base de  $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ ,  $Z(J) = \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  d'après (12). Comme  $J$  et  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  sont engendrés par des fonctions affines, ils sont radiciels, d'où  $Z(J) = \text{gr}_{\mathcal{F}} I$ .  $\square$

**Proposition 3.16.** *On a un isomorphisme  $\mathfrak{n}$ -équivariant,*

$$\vartheta : \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \rightarrow \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)],$$

*entre les algèbres graduées  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q$  et  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ .*

*Démonstration.* Rappelons que l'on a un isomorphisme d'algèbres graduées  $\mathfrak{g}$ -équivariant entre  $\text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$  et  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ . D'après le Lemme 3.15, on en déduit les isomorphismes suivants :

$$\text{gr}_{\mathcal{F}} Q \simeq \text{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) / \text{gr}_{\mathcal{F}} I \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] / \mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)) \simeq \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)].$$

Il s'ensuit qu'on a un isomorphisme d'algèbres graduées  $\vartheta : \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \rightarrow \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ . Comme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I$  est  $\mathfrak{n}$ -stable, l'isomorphisme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} I \simeq \mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp))$  est  $\mathfrak{n}$ -équivariant. Par conséquent,  $\vartheta$  est  $\mathfrak{n}$ -équivariant.  $\square$

La filtration  $(\mathcal{F}_k Q)_k$  induit une filtration  $(\mathcal{F}_k H := H \cap \mathcal{F}_k Q)_k$  sur  $H$ . Par conséquent, on a une application injective graduée  $\iota : \text{gr}_{\mathcal{F}} H \hookrightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q$ . C'est un morphisme d'algèbres comme on le vérifie aisément. En résumé,

**Proposition 3.17.** *L'application  $\iota : \text{gr}_{\mathcal{F}} H \hookrightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q$  est un morphisme d'algèbres graduées injectif.*

Soit  $\mu : \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  le comorphisme correspondant à l'inclusion  $\mathcal{S} \hookrightarrow \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ . D'après la Proposition 3.16, on en déduit un morphisme d'algèbres graduées  $\nu : \text{gr}_{\mathcal{F}} H \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ .

**Théorème 3.18.** *Le morphisme*

$$\nu : \text{gr}_{\mathcal{F}} H \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}]$$

*est un isomorphisme d'algèbres de Poisson graduées.*

Afin de montrer ce résultat, on suit la stratégie de [11, Section 5] qui s'applique dans notre cas comme on le vérifiera. On détaille ici la démonstration qui repose sur la théorie des suites spectrales. Notre principale référence pour les suites spectrales est [5].

Rappelons que l'opération adjointe de  $\mathfrak{n}$  dans  $U(\mathfrak{g})$  induit une opération dans  $Q$  (car  $\mathfrak{n}$  stabilise  $I$ ). Considérons le complexe des cochaînes de Chevalley-Eilenberg du  $\mathfrak{n}$ -module  $Q$  :

$$0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^i \rightarrow \dots$$

où  $C^i := \text{Hom}(\bigwedge^i \mathfrak{n}, Q) \simeq (\bigwedge^i \mathfrak{n})^* \otimes Q \simeq \bigwedge^i \mathfrak{n}^* \otimes Q$ , et soit  $\partial : C^\bullet \rightarrow C^{\bullet+1}$  la différentielle correspondante. Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\mathfrak{n}^*(j) := \{\xi \in \mathfrak{n}^*; (\text{ad}^* h_\Gamma)\xi = j\xi\}$  où  $\text{ad}^* h_\Gamma$  désigne l'opération coadjointe de  $h_\Gamma$  dans  $\mathfrak{g}^*$ . On constate que  $\mathfrak{n}^*(j) \simeq (\mathfrak{g}_{-j} \cap \mathfrak{n})^*$ . Comme  $\mathfrak{n} \subset \bigoplus_{j \leq -1} \mathfrak{g}_j$ , on a  $\mathfrak{n}^* = \bigoplus_{j \geq 1} \mathfrak{n}^*(j)$ . Soit  $i \in \mathbb{N}$ . On a

$$\bigwedge^i \mathfrak{n}^* = \bigoplus_{q \geq 1} (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q \quad \text{où} \quad (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q := \bigoplus_{j_1 + \dots + j_i = q} \mathfrak{n}^*(j_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{n}^*(j_i).$$

On définit une filtration croissante sur  $C^i$  en posant :

$$\mathcal{F}_k C^i := \sum_{q+j \leq k} (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}_j Q, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Remarquons que  $C^0 = Q$  et que  $\mathcal{F}_k C^0 = \mathcal{F}_k Q$  pour tout  $k$ . De plus,  $\mathcal{F}_k C^i = 0$  pour  $k$  (négatif) suffisamment petit.

**Lemme 3.19.** *Pour tout  $i$ , on a  $\partial(\mathcal{F}_k C^i) \subset \mathcal{F}_k C^{i+1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{F}_k C^i$ . Montrons que  $\partial f \in \mathcal{F}_k C^{i+1}$ . On peut supposer que  $f = \varphi \otimes v$  où  $\varphi \in (\bigwedge^i \mathfrak{n}^*)_q$  et  $v \in \mathcal{F}_j Q$  tels que  $q + j \leq k$ . Soient  $Y_1, \dots, Y_{i+1}$  des

éléments de  $\mathfrak{n}$  tels que pour tout  $r \in \{1, \dots, i+1\}$ ,  $Y_r \in \mathfrak{g}_{\lambda_r}$  avec  $\lambda_r \leq -1$ . Alors

$$\begin{aligned} & \partial f(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{i+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{i+1} (-1)^l Y_l \cdot f(Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge Y_{i+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq l < m \leq i+1} (-1)^{l+m} f([Y_l, Y_m] \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_m \wedge \dots \wedge Y_{i+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{i+1} (-1)^l Y_l \cdot (\varphi(Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge Y_{i+1})v) \\ &+ \sum_{1 \leq l < m \leq i+1} (-1)^{l+m} \varphi([Y_l, Y_m] \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_m \wedge \dots \wedge Y_{i+1})v. \end{aligned}$$

Si  $\sum_{r \neq l} \lambda_r \neq -q$ , alors  $\varphi(Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge Y_{i+1})$  est nul. D'autre part,  $Y_l v \in \mathcal{F}_{j+\lambda_l} Q$ .

De même, si  $\sum_r \lambda_r \neq -q$ , alors  $\varphi([Y_l, Y_m] \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_l \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_m \wedge \dots \wedge Y_{i+1})$  est nul.

Ainsi,  $\partial f \in \sum_{r=1}^{i+1} (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_{q-\lambda_r} \otimes \mathcal{F}_{j+\lambda_r} Q + (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}_j Q$ , et  $\partial f \in \mathcal{F}_k C^{i+1}$ .  $\square$

Rappelons que la structure de  $\mathfrak{n}$ -module sur  $Q$  induit une structure de  $\mathfrak{n}$ -module sur  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q$ . Considérons le complexe,

$$G^i := \text{Hom}(\wedge^i \mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq (\wedge^i \mathfrak{n})^* \otimes \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \simeq \wedge^i \mathfrak{n}^* \otimes \text{gr}_{\mathcal{F}} Q,$$

associé à  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q$ , et notons  $\delta$  la différentielle correspondante. On a une graduation sur  $G^i$  donnée par  $G^i = \bigoplus_k G_k^i$  où  $G_k^i := \bigoplus_{q+j=k} (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}^j Q / \mathcal{F}^{j+1} Q$ , avec  $\mathcal{F}^j Q := \mathcal{F}_{-j} Q$ .

Pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $i \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\mathcal{F}^k C^i := \mathcal{F}_{-k} C^i.$$

La filtration  $(\mathcal{F}^k C^i)_k$  est décroissante et  $\mathcal{F}^k C^i = 0$  pour  $k$  assez grand.

**Remarque 3.20.** Soit  $(k, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

1) L'application  $G_k^i \rightarrow \mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i$  qui à  $f_q \otimes \bar{v}_j \in (\wedge^i \mathfrak{n}^*)_q \otimes \mathcal{F}^j Q / \mathcal{F}^{j+1} Q$ , avec  $q+j=k$ , associe la classe de  $f_q \otimes v_j$ , où  $v_j$  est un représentant de  $\bar{v}_j$ , est un isomorphisme. On identifie désormais  $G_k^i$  à  $\mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i$ .

2) On a  $\delta(G_k^i) \subset G_k^{i+1}$  par le Lemme 3.19.

L'inclusion  $\mathcal{F}^k(C^i) \hookrightarrow C^i$  induit un morphisme  $H^i(\mathcal{F}^k(C^\bullet)) \rightarrow H^i(C^\bullet)$ . Notons  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q)$  l'image de  $H^i(\mathcal{F}^k(C^\bullet))$  dans  $H^i(C^\bullet)$ . Ceci définit une filtration sur  $H^i(C^\bullet) = H^i(\mathfrak{n}, Q)$  et,

$$\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) \simeq \frac{\ker \partial \cap \mathcal{F}^k C^i}{\text{im } \partial \cap \mathcal{F}^k C^i}.$$

On peut alors considérer l'algèbre graduée associée :

$$\text{gr}_{\mathcal{F}} H^i(\mathfrak{n}, Q) = \bigoplus_k \text{gr}_{\mathcal{F}, k} H^i(\mathfrak{n}, Q),$$

où  $\text{gr}_{\mathcal{F}, k} H^i(\mathfrak{n}, Q) = \mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) / \mathcal{F}^{k+1} H^i(\mathfrak{n}, Q)$ .

**Remarque 3.21.** Pour  $i = 0$ , on a  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) = \text{gr}_{\mathcal{F}} Q^n = \text{gr}_{\mathcal{F}} H$ .

**Proposition 3.22.** (i) On a un isomorphisme d'algèbres entre  $H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)$  et  $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ .  
(ii) Pour tout  $i > 0$ , on a  $H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) = 0$ .

*Démonstration.* (i) L'isomorphisme  $\alpha : N \times \mathcal{S} \rightarrow \chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  du Théorème 3.8 induit un isomorphisme

$$\alpha^* : \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)] \rightarrow \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}].$$

Le groupe  $N$  opère dans  $N \times \mathcal{S}$  par  $x.(y, s) = (xy, s)$ , avec  $x, y \in N$  et  $s \in \mathcal{S}$ , et dans  $\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)$  par l'opération coadjointe. Ceci induit des opérations de  $N$  dans  $\mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  et dans  $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$ . On vérifie sans peine que  $\alpha$  et  $\alpha^*$  sont  $N$ -équivalents pour ces opérations. Ainsi,

$$\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]^N \simeq (\mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}])^N \simeq \mathbb{C}[N]^N \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}] \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}]$$

car  $\mathbb{C}[N]^N = \mathbb{C}$ . D'autre part, d'après la Proposition 3.16, on a

$$\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]^N = \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]^{\mathfrak{n}} = H^0(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]) \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q).$$

On obtient ainsi l'isomorphisme souhaité :

$$H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}].$$

(ii) Les isomorphismes  $\vartheta : \text{gr}_{\mathcal{F}} Q \rightarrow \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$  et  $\alpha^* : \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)] \rightarrow \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]$  nous donnent, pour tout  $i \geq 0$ ,

$$H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]) \simeq H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]).$$

L'opération de  $N$  dans  $N \times \mathcal{S}$  implique  $H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]) = H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N]) \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ . D'autre part, d'après [7, Theorem 10.1] (ou [14, Lemma 5.1] ou [12]), pour  $i > 0$ ,  $H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N])$  est égal au  $i$ -ème groupe de cohomologie du complexe de De Rham pour  $N$ . Ce dernier est nul d'après [13, Ch. III, Theorem 3.7]. En conclusion,  $H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}]) = H^i(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[N]) \otimes \mathbb{C}[\mathcal{S}] = 0$ , ce qui achève la démonstration de (ii).  $\square$

Compte tenu de la Proposition 3.22(i), on souhaite montrer que  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)$ . Comme dans [11, Section 5], nous y parvenons à l'aide de suites spectrales. D'après le Lemme 3.19, on associe à la filtration  $(\mathcal{F}^k C^\bullet)_k$  la suite spectrale donnée par :

$$\begin{aligned} E_m^{k,l} &:= \frac{\mathcal{F}^k C^{k+l} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^{k+m} C^{k+l+1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}{\partial(\mathcal{F}^{k-m+1} C^{k+l-1} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^k C^{k+l})) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}; \\ E_\infty^{k,l} &:= \frac{\ker \partial \cap \mathcal{F}^k C^{k+l} + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}{\text{im } \partial \cap \mathcal{F}^k C^{k+l} + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}; \\ E^i &:= H^i(C^\bullet) = H^i(\mathfrak{n}, Q). \end{aligned}$$

Il résulte de [5, Ch. XV, Section 4] que

$$(13) \quad E_\infty^{k,l} \simeq \text{gr}_{\mathcal{F},k} E^{k+l}.$$

Compte tenu de la Remarque 3.20 (2), on peut poser pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $i > 0$ ,

$$H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k := \frac{\ker \delta \cap G_k^i}{\delta(G_k^{i-1})}.$$

**Lemme 3.23.** (i) Pour tous  $k, l \in \mathbb{Z}$ , on a  $E_1^{k,l} \simeq H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k$ .

(ii) On a  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)$ .

*Démonstration.* (i) On a

$$E_1^{k,l} = \frac{\mathcal{F}^k C^{k+l} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^{k+1} C^{k+l+1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}{\partial(\mathcal{F}^k C^{k+l-1} \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^k C^{k+l})) + \mathcal{F}^{k+1} C^{k+l}}.$$

De la Remarque 3.20 et du diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc} G_k^{i-1} & \xrightarrow{\delta} & G_k^i & \xrightarrow{\delta} & G_k^{i+1} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathcal{F}^k C^{i-1} / \mathcal{F}^{k+1} C^{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{F}^k C^{i+1} / \mathcal{F}^{k+1} C^{i+1} \end{array}$$

on tire,

$$H^i(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k \simeq \frac{\ker(\delta) \cap \mathcal{F}^k C^i / \mathcal{F}^{k+1} C^i}{\delta(\mathcal{F}^k C^{i-1} / \mathcal{F}^{k+1} C^{i-1})} \simeq \frac{\mathcal{F}^k C^i \cap \partial^{-1}(\mathcal{F}^{k+1} C^{i+1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^i}{\partial(\mathcal{F}^k C^{i-1}) + \mathcal{F}^{k+1} C^i}.$$

En particulier, lorsque  $i = k + l$ , on obtient (i).

(ii) D'après la Proposition 3.22(ii), pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $k + l > 0$ , on a  $E_1^{k,l} \simeq H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k = 0$ . Comme  $C^i = 0$  pour tout  $i < 0$ , pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $k + l < 0$ , on a  $E_1^{k,l} = 0$ .

Soit  $1 < s < \infty$ . D'après ce qui précède, il résulte de [5, Ch. XV, Propositions 5.2, 5.2a] que

$$E_1^{k,l} \simeq E_s^{k,l}.$$

La suite spectrale  $(E_s^{k,l})_s$  est donc stationnaire. Par conséquent,  $E_1^{k,l} \simeq E_\infty^{k,l}$ . D'après (i), pour  $k, l \in \mathbb{Z}$  vérifiant  $k + l = 0$  on a  $E_1^{k,l} \simeq H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k = H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k$ . D'autre part, d'après (13), on a  $E_\infty^{k,l} \simeq \text{gr}_{\mathcal{F},k} H^{k+l}(\mathfrak{n}, Q) = \text{gr}_{\mathcal{F},k} H^0(\mathfrak{n}, Q)$ , et (ii) s'ensuit.  $\square$

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le Théorème 3.18 :

*Démonstration du Théorème 3.18.* D'après la Proposition 3.22 et le Lemme 3.23, on a :

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}] \simeq H^0(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q) \simeq \text{gr}_{\mathcal{F}} H^0(\mathfrak{n}, Q) = \text{gr}_{\mathcal{F}} Q^n = \text{gr}_{\mathcal{F}} H.$$

Par construction, le morphisme  $\nu$  est un isomorphisme d'algèbres graduées. Il reste à montrer que c'est un morphisme d'algèbres de Poisson. Cela résulte de la Remarque 3.14.  $\square$

**Remarque 3.24.** Pour tout  $i > 0$ , on a  $H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$ . En effet, soient  $k, l \in \mathbb{Z}$  tels que  $k + l > 0$ . D'après le Lemme 3.23 (démonstration de (ii)), on a

$$E_1^{k,l} = H^{k+l}(\mathfrak{n}, \text{gr}_{\mathcal{F}} Q)_k = 0.$$

D'après [5, Ch. XV, Proposition 5.1], on déduit que

$$0 = E_\infty^{k,l} = \text{gr}_{\mathcal{F},k} H^{k+l}(\mathfrak{n}, Q).$$

Ainsi,  $\text{gr}_{\mathcal{F}} H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$  pour tout  $i > 0$ . Par conséquent,  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) = \mathcal{F}^{k+1} H^i(\mathfrak{n}, Q)$  pour tout  $k$  et tout  $i > 0$ . Pour  $k$  assez grand,  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$ . On déduit que  $\mathcal{F}^k H^i(\mathfrak{n}, Q) = 0$  pour tout  $k$ . La remarque s'ensuit.

Soit  $\mathfrak{m}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  admissible pour  $e$ . Soient  $\mathcal{C}$  la catégorie abélienne des  $U(\mathfrak{g})$ -modules à gauche finiment engendrés sur lesquels, pour tout  $m \in \mathfrak{m}$ , l'élément  $m - \chi(m)$  de  $U(\mathfrak{g})$  agit localement comme un endomorphisme nilpotent, et  $\mathcal{C}'$  la catégorie des  $H$ -modules à gauche finiment engendrés.



On note d'une part  $Q \otimes_H - : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur défini par

$$(Q \otimes_H -)(V) = Q \otimes_H V \quad \text{et} \quad (Q \otimes_H -)(\varphi)(q \otimes v) = q \otimes \varphi(v),$$

pour tous  $V, W$  deux objets de  $\mathcal{C}'$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(V, W)$ ,  $q \in Q$  et  $v \in V$ . D'autre part, on désigne par  $\text{Wh} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  le foncteur

$$\text{Wh}(E) = \{x \in E ; mx = \chi(m)x \text{ pour tout } m \in \mathfrak{m}\} \quad \text{et} \quad \text{Wh}(\Phi)(x) = \Phi(x)$$

pour tous  $E, F$  deux objets de  $\mathcal{C}$ ,  $\Phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$  et  $x \in \text{Wh}(E)$ . On remarque que  $\text{Wh}(\Phi)$  est bien défini car  $\Phi(\text{Wh}(E)) \subset \text{Wh}(F)$ .

**Théorème 3.25.** *Le foncteur  $Q \otimes_H -$  établit une équivalence de catégories entre les catégories  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}$ . L'inverse est donné par le foncteur  $\text{Wh}$ .*

Les arguments de [11, Section 6] s'appliquent à notre situation compte tenu de la démonstration précédente. On omet ici la démonstration.

#### 4. ÉQUIVALENCE ET PROBLÈME D'ISOMORPHISME

Compte tenu de la généralisation faite à la section précédente, il est naturel de se demander si l'algèbre  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  dépend du choix de la paire admissible  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ . Cette question sera traitée dans cette section. On conserve les notations des sections précédentes. En particulier,  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie et  $e$  est un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$ .

**Définition 4.1.** *Soient  $\Gamma \in GA(e)$  et  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e, \Gamma)$ . On note*

$$(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$$

si  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{n}' \subseteq \mathfrak{n}$ .

*Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e)$ . On dit que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont **comparables** s'il existe  $\Gamma \in GA(e)$  telle que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e, \Gamma)$  et telle que*

$$(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \quad \text{ou} \quad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}').$$

**Exemple 4.2.** *Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une bonne graduation pour  $e$ . La paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{< 0})$  est admissible pour  $e$ . De plus, pour tout  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$ , on a*

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{< 0}).$$

*Plus généralement, si  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est une graduation de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$  et  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{< 0} = \{0\}$  alors tout  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$  vérifie*

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{< 0}),$$

où  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{< 0})$  est l'unique paire optimale d'après la Proposition 2.12.

**Remarque 4.3.** *Si  $\Gamma \in GA(e)$  et si  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$  est optimale, alors  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est maximale pour l'ordre partiel  $\preceq_{\Gamma}$  sur les éléments de  $PA(e, \Gamma)$ .*

**Exemple 4.4.** *On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_8(\mathbb{C})$  et que  $e := \sum_{\substack{1 \leq i \leq 7 \\ i \neq 4}} E_{i, i+1}$ . On considère la graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  définie par l'élément semisimple*

$$\frac{1}{2} \text{diag}(7, 1, -5, -11, 11, 5, -1, -7).$$

*On a  $\dim \mathfrak{g}^e = 15$  et  $e \in \mathfrak{g}_3$ . Posons*

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leq -3} \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \quad \mathfrak{m}' := \mathfrak{g}_{\leq -3} \oplus \mathbb{C}E_{6,1}, \quad \mathfrak{n}' := \mathfrak{m}' \oplus \mathbb{C}E_{7,2} \oplus \mathbb{C}E_{8,3} \oplus \mathbb{C}E_{3,7} \oplus \mathbb{C}E_{4,8}.$$

On vérifie par un calcul que les paires  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont admissibles pour  $e$ . Elles sont comparables. Précisément, on a  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ .

**Exemple 4.5.** Deux paires admissibles pour  $e$  ne sont pas toujours comparables. En effet, reprenons l'exemple 2.8. On a vu que

$$(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{2,1} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}) \in PA(e, \Gamma).$$

De la même manière on peut montrer que la paire

$$(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{3,2} \oplus \mathbb{C}E_{4,3})$$

appartient à  $PA(e, \Gamma)$ . On remarque que les paires  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$  et  $(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$  ne sont pas comparables.

**Proposition 4.6.** Si  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1), (\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) \in PA(e)$  sont comparables, alors les algèbres  $H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$  et  $H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $e$ -admissible  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$  et  $(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ . En particulier,

$$\mathfrak{g}_{\leq -a} \subseteq \mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}_2 \subseteq \mathfrak{n}_2 \subseteq \mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{g}_{< 0}.$$

Comme  $I(\mathfrak{m}_1) \subset I(\mathfrak{m}_2)$ , on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \ker \Phi \rightarrow Q(\mathfrak{m}_1) \xrightarrow{\Phi} Q(\mathfrak{m}_2) \rightarrow 0,$$

où  $\Phi$  est le morphisme de  $Q(\mathfrak{m}_1)$  sur  $Q(\mathfrak{m}_2)$  induit par le morphisme quotient (surjectif)  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow Q(\mathfrak{m}_2)$ . Soit  $\bar{\Phi}$  la restriction de  $\Phi$  à  $H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ . Comme  $I(\mathfrak{m}_1) \subset I(\mathfrak{m}_2)$  et  $\mathfrak{n}_2 \subset \mathfrak{n}_1$ ,

$$\bar{\Phi}(H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)) \subseteq H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2).$$

On rappelle que la filtration de Kazhdan généralisée  $\mathcal{F}$  induit une filtration croissante sur  $H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$  et  $H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$ . On note  $\text{gr } \Phi$  et  $\text{gr } \bar{\Phi}$  les morphismes gradués associés à  $\Phi$  et  $\bar{\Phi}$  respectivement :

$$\text{gr } \Phi : \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_1) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_2), \quad \text{gr } \bar{\Phi} : \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) \rightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2).$$

Soit  $\mathfrak{s}$  un sous-espace gradué de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire de  $[\mathfrak{n}_2, e]$  dans  $\mathfrak{m}_2^{\perp}$ . D'après le Lemme 3.2, on a  $\mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{g}, e] = \mathfrak{g}$ . Il s'ensuit que  $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{n}_1, e] = \{0\}$ . D'après la condition (A6), on en déduit que  $\mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{n}_1, e] = \mathfrak{m}_1^{\perp}$ . On pose alors

$$\mathcal{S} := \kappa(e + \mathfrak{s}).$$

D'après le Théorème 3.18, on a un isomorphisme

$$\nu_i : \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}],$$

pour  $i \in \{1, 2\}$ . Montrons que  $\nu_2 \circ \text{gr } \bar{\Phi} = \nu_1$ . Soient  $\mu_i$  et  $\mu$  les comorphismes correspondants aux inclusions  $\mathcal{S} \hookrightarrow \kappa(e + \mathfrak{m}_i^{\perp})$  ( $i = 1, 2$ ), et  $\kappa(e + \mathfrak{m}_2^{\perp}) \hookrightarrow \kappa(e + \mathfrak{m}_1^{\perp})$ . Le diagramme suivant commute alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\kappa(e + \mathfrak{m}_2^{\perp})] & \xrightarrow{\mu_2} & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \\ \mu \uparrow & \nearrow \mu_1 & \\ \mathbb{C}[\kappa(e + \mathfrak{m}_1^{\perp})] & & \end{array}$$

Soit  $\iota_i : \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \hookrightarrow \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_i)$  le morphisme injectif donné par la Proposition 3.17 pour  $i = 1, 2$ . On a  $\nu_i = \mu_i \circ \iota_i$ . De plus, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) & \xrightarrow{\iota_2} & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_2) \\ \text{gr } \bar{\Phi} \uparrow & & \uparrow \text{gr } \Phi \\ \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) & \xrightarrow{\iota_1} & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_1). \end{array}$$

Comme  $\text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_i) \simeq \mathbb{C}[\kappa(e + \mathfrak{m}_i^\perp)]$  pour  $i \in \{1, 2\}$  d'après la Proposition 3.16, on en déduit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) & \hookrightarrow & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_2) & \simeq & \mathbb{C}[\kappa(e + \mathfrak{m}_2^\perp)] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \\ \text{gr } \bar{\Phi} \uparrow & & \text{gr } \Phi \uparrow & & \uparrow \mu & \nearrow & \\ \text{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) & \hookrightarrow & \text{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_1) & \simeq & \mathbb{C}[\kappa(e + \mathfrak{m}_1^\perp)] & & \end{array}$$

d'où  $\nu_2 \circ \text{gr } \bar{\Phi} = \nu_1$ . On en déduit que  $\text{gr } \bar{\Phi}$  est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Comme  $\mathcal{F}_k Q = \{0\}$  pour tout  $k < 0$  et d'après [24, Propositions 7.5.7 and 7.5.8],  $\bar{\Phi}$  est donc un isomorphisme d'algèbres ce qui démontre la proposition.  $\square$

**Remarque 4.7.** *L'isomorphisme établi dans la démonstration de la Proposition 4.6 n'est pas canonique car il dépend du choix du sous-espace gradué  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$ .*

**Définition 4.8.** *Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}), (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e)$ . On dit que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont **équivalentes**, et on note  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \sim (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ , s'il existe une famille finie de paires  $e$ -admissibles  $\{(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$  telle que*

- (1)  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  ;
- (2) les paires  $(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)$  et  $(\mathfrak{m}_{i+1}, \mathfrak{n}_{i+1})$  sont comparables pour tout  $i \in \{1, \dots, s-1\}$  ;
- (3)  $(\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s) = (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ .

La relation  $\sim$  définit une relation d'équivalence sur  $PA(e)$ .

**Exemples 4.9.** (1) *On a vu dans l'Exemple 4.5 que les paires*

$$(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{2,1} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}) \quad \text{et} \quad (\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) := (\mathfrak{g}_{\leq -2}, \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{3,2} \oplus \mathbb{C}E_{4,3})$$

*ne sont pas comparables. Cependant, on peut montrer que la sous-algèbre*

$$\mathfrak{m}_3 := \mathfrak{g}_{\leq -2} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}$$

*est admissible pour  $e$  relativement à la même graduation  $\Gamma$ , et que*

$$(\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_3) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) \quad \text{et} \quad (\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_3) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2).$$

*Il s'ensuit que les paires  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$  et  $(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$  sont équivalentes.*

(2) *Donnons un exemple de paires  $e$ -admissibles équivalentes qui ne sont pas issues de la même graduation  $e$ -admissible. On reprend l'Exemple 2.7. On rappelle que la paire  $(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2})$  est la seule paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma$ . On considère ensuite la graduation  $\Gamma' : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$  définie par l'élément semisimple  $\frac{1}{3} \text{diag}(4, -2, -2)$ . Les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés par la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que  $(\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2})$  est la seule paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma'$ . On considère enfin la graduation de Dynkin  $\Gamma'' : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}''_j$  dont les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la paire  $(\mathfrak{g}''_{-2}, \mathfrak{g}''_{-2} \oplus \mathfrak{g}''_{-1})$  est  $e$ -admissible et optimale d'après l'Exemple 2.5. De plus,  $(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2})$  et  $(\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2})$  appartiennent à  $PA(e, \Gamma'')$  et vérifient

$$(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2}) \preceq_{\Gamma''} (\mathfrak{g}''_{-2}, \mathfrak{g}''_{-2} \oplus \mathfrak{g}''_{-1}) \quad \text{et} \quad (\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2}) \preceq_{\Gamma''} (\mathfrak{g}''_{-2}, \mathfrak{g}''_{-2} \oplus \mathfrak{g}''_{-1}).$$

Il s'ensuit que les paires  $(\mathfrak{g}_{-2}, \mathfrak{g}_{-2})$  et  $(\mathfrak{g}'_{-2}, \mathfrak{g}'_{-2})$  sont équivalentes.

**Remarque 4.10.** Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  une graduation de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  pour  $a > 1$ . Si  $(\mathfrak{g}_{\leq -a}, \mathfrak{g}_{< 0})$  est une paire admissible pour  $e$ , toutes les paires admissibles pour  $e$  relativement à  $\Gamma$  sont équivalentes d'après l'Exemple 4.2 (2). En particulier, les paires admissibles pour  $e$  relativement à une graduation de Dynkin (et plus généralement à une bonne graduation) sont équivalentes.

**Théorème 4.11.** Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  deux paires  $e$ -admissibles équivalentes. Alors les algèbres  $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $H(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Comme  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \sim (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$ , il existe d'après la Définition 4.8 une famille finie  $\{(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de paires admissibles pour  $e$  telle que  $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ,  $(\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s) = (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  et telle que les paires  $(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i)$  et  $(\mathfrak{m}_{i+1}, \mathfrak{n}_{i+1})$  soient comparables pour tout  $i \in \{1, \dots, s-1\}$ . Il découle de la Proposition 4.6 que

$$H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \simeq H(\mathfrak{m}_{i+1}, \mathfrak{n}_{i+1}) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, s-1\}.$$

Alors

$$H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \simeq H(\mathfrak{m}_j, \mathfrak{n}_j) \text{ pour tout } i, j \in \{1, \dots, s\}.$$

En particulier,

$$H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) \simeq H(\mathfrak{m}_s, \mathfrak{n}_s) = H(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}').$$

□

**Remarque 4.12.** Si  $e$  est distingué alors, d'après la Proposition 2.9 et la Remarque 4.10, les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes et donc, d'après le Théorème 4.11, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.

## 5. CONNEXITÉ DES GRADUATIONS ADMISSIBLES

On conserve les notations des sections précédentes. La notion de paires admissibles pour  $e$  relativement à des  $\mathbb{Z}$ -graduations de  $\mathfrak{g}$  peut être étendue aux  $\mathbb{Q}$ -graduations de  $\mathfrak{g}$  comme suit : une paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  de sous-algèbres ad-nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  est dite **admissible pour**  $e$  s'il existe une  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  de  $\mathfrak{g}$  et un entier  $a > 1$  tels que les

conditions (A1) à (A6) soient vérifiées. De façon analogue, on dira qu'une  $\mathbb{Q}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  est **admissible pour**  $e$  s'il existe un entier  $a > 1$  tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et s'il existe une paire admissible pour  $e$  relativement à cette graduation. On note dans la suite  $PA_{\mathbb{Q}}(e)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  relativement à des  $\mathbb{Q}$ -graduations de  $\mathfrak{g}$  et  $GA_{\mathbb{Q}}(e)$  l'ensemble des  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$ . Pour  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ , on désigne par  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma)$  l'ensemble des paires admissibles pour  $e$  relativement à la  $\mathbb{Q}$ -gradation  $\Gamma$ .

Pour une  $\mathbb{Q}$ -graduation  $\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ , on rappelle que  $\lambda\Gamma$  est la  $\mathbb{Q}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$  définie par l'élément semisimple  $\lambda h_\Gamma$  où  $h_\Gamma$  est l'élément semisimple qui définit la graduation  $\Gamma$ .

**Proposition 5.1.** (i) Pour tout  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$  tel que  $\lambda\Gamma \in GA(e)$ .  
(ii) Pour tous  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ , on a  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma) = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda\Gamma)$ .

**Définition 5.2.** Deux  $\mathbb{Q}$ -graduations  $\Gamma, \Gamma'$  admissibles pour  $e$  sont dites **adjacentes** si elles ont une paire  $e$ -admissible en commun, i.e.,  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma) \cap PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma') \neq \emptyset$ .

**Définition 5.3.** Deux graduations  $\Gamma, \Gamma' \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  sont dites **connexes** s'il existe une suite  $(\Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  telle que

- (1)  $\Gamma = \Gamma_1$ ;
- (2) les graduations  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  sont adjacentes pour tout  $1 \leq i \leq s-1$ ;
- (3)  $\Gamma' = \Gamma_s$ .

**Exemples 5.4.** (1) Soit  $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ , les graduations  $\lambda\Gamma$  et  $\Gamma$  sont adjacentes d'après la Proposition 5.1 (ii).

(2) On reprend l'Exemple 4.9(1) et on rappelle que  $(\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_3) \in PA(e, \Gamma)$ . On considère la graduation de Dynkin  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$  de  $\mathfrak{g}$  associée à  $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$ . Les degrés des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  sont donnés sur la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que  $\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{g}'_{-2}$ . Par conséquent,  $(\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_3)$  est une paire admissible pour  $e$  commune à la graduation  $\Gamma$  et la graduation de Dynkin qui sont donc adjacentes.

**Exemple 5.5.** Deux  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  ne sont pas toujours adjacentes. En effet, dans l'Exemple 4.9(2) les graduations  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont connexes via  $\Gamma''$  mais ne sont pas adjacentes.

**Proposition 5.6.** Deux éléments  $\Gamma, \Gamma' \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  sont connexes si et seulement si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont connexes via une suite d'éléments de  $GA(e)$ .

*Démonstration.* L'implication réciproque est évidente. Montrons l'implication directe. D'après l'hypothèse, il existe une suite  $(\Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  de  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  telle que  $\Gamma = \Gamma_1$  et  $\Gamma' = \Gamma_s$  et telle que les graduations  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  soient adjacentes pour tout  $1 \leq i \leq s-1$ . D'après la Proposition 5.1, pour tout  $1 \leq i \leq s$ , il existe  $\lambda_i \in \mathbb{Q}_+^*$  tel que  $\lambda_i \Gamma_i \in GA(e)$  et  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma_i) = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda_i \Gamma_i)$ . On en déduit que les graduations  $\lambda_1 \Gamma$  et  $\lambda_s \Gamma'$  sont connexes via une suite de graduations  $(\lambda_i \Gamma_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ . Or,  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma) = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda_1 \Gamma)$  et  $PA_{\mathbb{Q}}(e, \Gamma') = PA_{\mathbb{Q}}(e, \lambda_s \Gamma')$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

La suite du paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 5.7.** Les  $\mathbb{Q}$ -graduations admissibles pour  $e$  sont connexes entre elles.

On fixe désormais une  $\mathbb{Z}$ -graduation  $e$ -admissible  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  où  $a > 1$  et un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, h, f)$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$  (cf. [24, Proposition 32.1.7]). Soient  $h_\Gamma$  l'élément semisimple de  $\mathfrak{g}$  définissant  $\Gamma$  et  $\mathfrak{s} := \text{Vect}(e, h, f)$ . On pose

$$t := h_\Gamma - \frac{a}{2}h.$$

L'élément  $t$  de  $\mathfrak{g}$  est semisimple et appartient à  $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^s$ .

On pose  $[0, 1]_{\mathbb{Q}} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Soit  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ . On considère l'élément semisimple

$$h_{\Gamma}^{(\varepsilon)} := \frac{a}{2}h + \varepsilon t.$$

Pour  $j \in \mathbb{Q}$ , on note

$$\mathfrak{g}_j^{(\varepsilon)} := \{x \in \mathfrak{g}; (\text{ad } h_{\Gamma}^{(\varepsilon)})(x) = jx\}.$$

Soit alors  $\Gamma^{(\varepsilon)} : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j^{(\varepsilon)}$  la  $\mathbb{Q}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  définie par l'élément semisimple  $h_{\Gamma}^{(\varepsilon)}$ . En particulier,  $h_{\Gamma}^{(1)} = h_{\Gamma}$ ,  $\Gamma^{(1)} = \Gamma$  et  $\Gamma^{(0)} = \frac{a}{2}\Gamma_{\text{Dyn}}^h$ . Observons aussi que  $e \in \mathfrak{g}_a^{(\varepsilon)}$ .

**Lemme 5.8.** *La gradation  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  appartient à  $GA_{\mathbb{Q}}(e)$ .*

*Démonstration.* D'après le Théorème 2.14, comme la gradation  $\Gamma$  est admissible,  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Par suite, avec les notations de la formule (7) de la Section 2, on a  $|\lambda| < \frac{a}{2}(d_i + 1)$ . Ainsi, pour  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ ,

$$|\varepsilon\lambda| \leq |\lambda| < \frac{a}{2}(d_i + 1),$$

ceci implique que  $\mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , de nouveau d'après la formule (7). Le lemme s'ensuit d'après le Théorème 2.14.  $\square$

La démonstration du Théorème 5.7 étant assez technique, on commence par en expliquer les idées principales. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer que  $\Gamma$  est connexe à  $\Gamma^{(0)}$  qui est adjacente à la gradation de Dynkin. On va construire une suite de rationnels  $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_s = 1$  telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, s\}$ ,  $\Gamma^{(\varepsilon_i)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon_{i+1})}$  soient adjacentes. Pour cela, on reprend dans les grandes lignes la démonstration du Théorème 2.14.

On rappelle quelques notations de la démonstration du Théorème 2.14. On a les décompositions

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{i,\lambda}, \quad \mathbf{E}_{i,\lambda} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l,$$

où la première décomposition est la décomposition orthogonale en composantes isotypiques de  $\mathfrak{s}$ -modules simples, la deuxième est la décomposition en sous-espaces propres de  $\text{ad } t$  et la troisième est la décomposition en sous-espaces propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  avec  $d_i$  la dimension d'un  $\mathfrak{s}$ -module simple de  $\mathbf{E}_i$ . Rappelons aussi que pour  $\lambda \geq 0$ ,

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathbf{E}_{i,\lambda} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}$$

est une décomposition orthogonale relative à la forme de Killing. Enfin pour tout  $l$ ,

$$(14) \quad m_{i,\lambda} = \frac{\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}}{d_i} = \dim \mathbf{E}_{i,\lambda}^l = \dim(\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e)$$

car  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e = \mathbf{E}_{i,\lambda}^{d_i-1}$ . Pour tous  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , l'espace  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  est stable par  $\text{ad } h_{\Gamma}^{(\varepsilon)}$ . De plus, pour tout  $l \in \{0, \dots, d_i-1\}$ ,  $\mathbf{E}_{i,\lambda}^l$  est un sous-espace propre de  $\text{ad } h_{\Gamma}^{(\varepsilon)}$  de valeur propre  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + la$  où

$$\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) + \varepsilon\lambda.$$

L'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma^{(\varepsilon)}$  sur  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  est donné par :

$$\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} := \{\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + la; l = 0, 1, \dots, d_i - 1\}.$$

**Remarque 5.9.** On a  $\Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} = -\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ . Il en résulte que

$$\text{Card}([ -a, 0[ \cap (\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} \cup \Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)})) \leq 2.$$

De plus, si ce cardinal vaut exactement 2, alors il existe  $b \in ]0, \frac{a}{2}[$  tel que

$$]-a, 0[ \cap (\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} \cup \Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)}) = \{-b, b - a\}.$$

Comme dans la démonstration du Théorème 2.14, on va s'intéresser à la « position du zéro » dans  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ , d'où la définition suivante :

**Définition 5.10.** On définit l'entier positif  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  par

- a)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 1$  si  $0 < \rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  ;
- b)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2(s+1) + 1$  si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + sa < 0 < \rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (s+1)a$  pour  $s \in \{0, \dots, d_i - 2\}$  ;
- c)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2d_i + 1$  si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (d_i - 1)a < 0$  ;
- d)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2(s+1)$  si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + sa = 0$  pour  $s \in \{0, \dots, d_i - 1\}$ .

On représente sur la Figure 1 la position du zéro dans  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  selon les différents cas de la Définition 5.10. Sur cette figure, les  $\bullet$  représentent les éléments de  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  et les  $|$  représentent les positions du zéro.

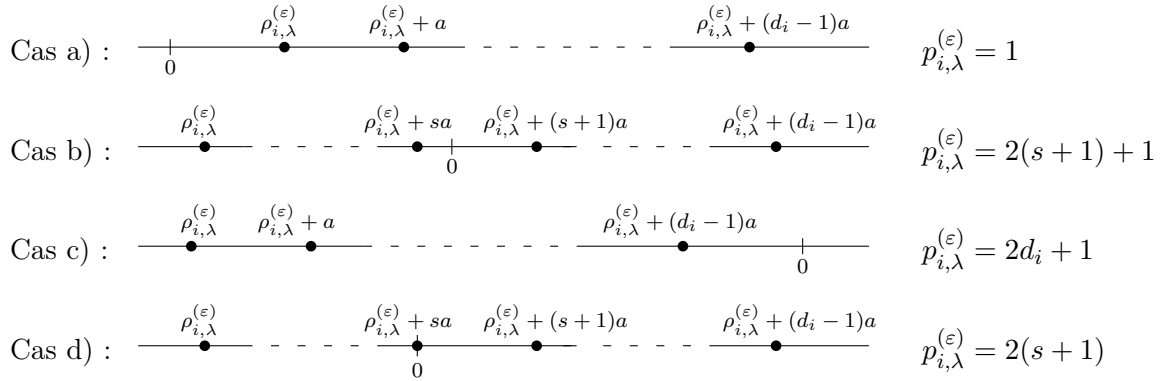


FIGURE 1. Position du zéro dans  $\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$

Comme  $\Xi_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} = -\Xi_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ , on a

$$(15) \quad p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + p_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} = 2d_i + 2.$$

**Exemple 5.11.** On reprend l'Exemple 2.13 où l'on considère

$$h := \text{diag}(5, 3, 1, -1, -3, -5, 2, 0, -2, 1, -1).$$

Il s'ensuit que les valeurs propres de  $\text{ad } t$  sont

$$-4, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 4.$$

On note  $\mathbf{E}_{i,\lambda}$  les sous-espaces propres avec  $d_i = i$ . Les couples  $(i, \lambda)$  pour  $\lambda \neq 0$  sont alors

$$(8, \pm \frac{1}{2}), (6, \pm \frac{1}{2}), (4, \pm \frac{1}{2}), (4, \pm \frac{7}{2}), (2, \pm \frac{7}{2}), (7, \pm 4), (5, \pm 4).$$

On obtient donc

$$p_{8, -\frac{1}{2}}^{(1)} = 9, p_{6, -\frac{1}{2}}^{(1)} = 7, p_{4, -\frac{1}{2}}^{(1)} = 5, p_{4, -\frac{7}{2}}^{(1)} = 7, p_{2, -\frac{7}{2}}^{(1)} = 5, p_{7, -4}^{(1)} = 11, p_{5, -4}^{(1)} = 9.$$

Les autres valeurs s'obtiennent grâce à l'égalité (15).

**Proposition 5.12.** Soient  $\varepsilon, \varepsilon' \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  tels que  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}| \leq 1$  pour tous  $i$  et  $\lambda$ . Alors les graduations  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$  sont adjacentes.

*Démonstration.* On cherche une paire  $e$ -admissible  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  commune à  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$  de la forme suivante :

$$\mathbf{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{n}_{i,\lambda}$$

telle que pour tous  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ , les sous-espaces  $\mathbf{m}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{n}_{i,\lambda}$  sont  $\Gamma^{(\varepsilon)}$ -gradués et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$ -gradués dans  $\mathbf{V}_{i,\lambda}$  et vérifient les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) du Lemme 2.15 appliqué à la décomposition  $\mathbf{g} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}$  et aux deux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$ .

Soient  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ . Pour la construction de  $\mathbf{m}_{i,\lambda}$  et  $\mathbf{n}_{i,\lambda}$ , on distingue deux cas : le cas où  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$  et le cas où  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}| = 1$ .

Cas I :  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$ . Dans ce cas,  $\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon')}$  et  $\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{< 0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{< 0}^{(\varepsilon')}$ . On distingue trois sous-cas.

(a) Si  $\lambda = 0$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,0} := \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathbf{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}, \quad \mathbf{n}_{i,0} := \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathbf{g}_{< 0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathbf{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)}.$$

(b) Si  $\lambda \neq 0$  et si  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  est pair ou appartient à  $\{1, 2d_i + 1\}$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}.$$

(c) Supposons  $\lambda \neq 0$  et  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  impair de la forme  $2k + 1$  où  $k \in \{1, \dots, d_i - 1\}$ .

Si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (k - 1)a \leq \rho_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} + (d_i - k - 1)a$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{< 0}^{(\varepsilon)} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathbf{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}.$$

Si  $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (k - 1)a > \rho_{i,-\lambda}^{(\varepsilon)} + (d_i - k - 1)a$ , on pose

$$\mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathbf{g}_{< 0}^{(\varepsilon)}.$$

Dans chacun des sous-cas, les conditions (C1), (C2) et (C3) sont vérifiées par construction. De plus, la condition (C4) est satisfaite. En effet, si  $\lambda = 0$ ,

$$\dim \mathbf{m}_{i,0} + \dim \mathbf{n}_{i,0} = (d_i - 1)m_{i,0} = \dim \mathbf{V}_{i,0} - \dim(\mathbf{V}_{i,0} \cap \mathbf{g}^e)$$

d'après (14). Si  $\lambda \neq 0$ ,

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim \mathbf{V}_{i,\lambda} - \dim(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}^e)$$

d'après (14). On constate aussi que dans tous les sous-cas, on a par construction

$$(16) \quad \mathbf{m}_{i,\lambda}, \mathbf{n}_{i,\lambda} \subseteq \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathbf{g}_{\leq -\frac{a}{2}}^{(\varepsilon')}.$$



Cas II :  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}| = 1$ . Il existe  $k \in \{1, \dots, d_i\}$  tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- (i)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k, 2k - 1)$ ;
- (ii)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k, 2k + 1)$ ;
- (iii)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k + 1, 2k)$ ;
- (iv)  $(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}, p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}) = (2k - 1, 2k)$ .

On représente sur la Figure 2 la position du zéro dans chacun des sous-cas (i), (ii), (iii) et (iv).

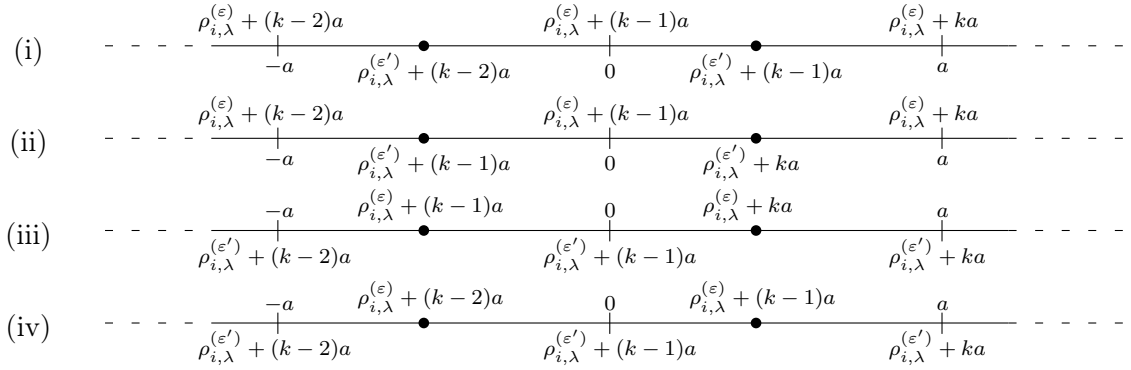


FIGURE 2. Position du zéro dans les sous-cas (i), (ii), (iii) et (iv)

On pose

$$(17) \quad \mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} := \bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l.$$

La condition (C2) est vérifiée car

$$\mathbf{m}_{i,\lambda}^\perp \cap [\mathbf{V}_{i,\lambda}, e] = \bigoplus_{l=1}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l + \bigoplus_{l=1}^{d_i-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l = [\mathbf{n}_{i,\lambda}, e].$$

Par construction, la condition (C3) est satisfaite. De plus, la condition (C4) l'est aussi car

$$\dim \mathbf{m}_{i,\lambda} + \dim \mathbf{n}_{i,\lambda} = 2[(d_i - 1)m_{i,\lambda}] = \dim V_{i,\lambda} - \dim(V_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e)$$

d'après (14). Pour chacun des sous-cas (i), (ii), (iii) et (iv), on représente dans la Table 2 les sous-espaces  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$ ,  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$ ,  $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$  et  $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$ . Ceci nous permet de conclure que la condition (C1) est vérifiée. On constate enfin que dans les sous-cas (i) et (ii), on a

$$(18) \quad \mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon)}.$$

Dans les sous-cas (iii) et (iv), on a

$$(19) \quad \mathbf{m}_{i,\lambda} = \mathbf{n}_{i,\lambda} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leq -a}^{(\varepsilon')}.$$

Cas II.	$\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$	$\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$	$\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$	$\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$
(i)	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$
(ii)	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$
(iii)	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$
(iv)	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^l$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^l$

TABLE 2. Cas II.

Conclusion. On pose

$$\mathbf{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathbf{n}_{i,\lambda}.$$

D'après le Lemme 2.15, la paire  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6). D'après (16), (18) et (19),  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{n}$  sont deux sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  et vérifient (A5). Ceci nous permet de conclure que  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  est une paire admissible pour  $e$  commune aux graduations  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon')}$ .  $\square$

**Proposition 5.13.** *Il existe une chaîne de rationnels  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = 1$  telle que*

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon_s = 1$$

avec pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$  et pour tout  $(i, \lambda)$  on a

- (1)  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$  pour tous  $\varepsilon, \varepsilon' \in ]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$  ;
- (2)  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)}| \leq 1$  pour tout  $\varepsilon \in ]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$  ;
- (3)  $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_{k+1})}| \leq 1$  pour tout  $\varepsilon \in ]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$ .

*Démonstration.* Observons que  $p_{i,\lambda}^{(0)} = d_i + 1$ . De plus, on remarque que  $p_{i,0}^{(\varepsilon)} = d_i + 1$  pour tout  $\varepsilon$ . D'autre part, lorsque  $\lambda \neq 0$ , on a

$$p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = 2k \Leftrightarrow 0 = \rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} + (k-1)a \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{a}{2}(d_i-1) - (k-1)a \right).$$

Il en résulte que lorsque  $\lambda \neq 0$ ,  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  n'est pair que pour un nombre fini de valeurs de  $\varepsilon$ . L'application  $\varepsilon \mapsto (p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)})_{i,\lambda}$  converge vers  $(d_i + 1)_{i,\lambda}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus, l'ensemble des couples  $(i, \lambda)$  est fini et, pour  $(i, \lambda)$  fixé, l'ensemble des valeurs des  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  est contenu dans  $\{1, \dots, 2d_i + 1\}$ . On en déduit qu'il existe  $0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon_s = 1$  tels que

- \* pour tout  $k \in \{1, \dots, s-1\}$ , il existe  $(i, \lambda)$  tel que  $\lambda \neq 0$  et  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)}$  soit pair ;
- \* pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$  différent de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ ,  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$  est impair pour tout  $\lambda \neq 0$ .

L'assertion est alors claire.  $\square$

**Exemple 5.14.** On reprend l'Exemple 5.11 et on conserve les mêmes notations. Par des calculs directs, on vérifie sans peine que  $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = i + 1$  pour  $\lambda \in \{-\frac{1}{2}, 0\}$  et pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]$ . De plus,

$$p_{i,-4}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} i+1 & \text{si } \varepsilon = 0; \\ i+2 & \text{si } 0 < \varepsilon < \frac{3}{4}; \\ i+3 & \text{si } \varepsilon = \frac{3}{4}; \\ i+4 & \text{si } \frac{3}{4} < \varepsilon \leq 1, \end{cases} \quad \text{et } p_{i,-\frac{7}{2}}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} i+1 & \text{si } 0 \leq \varepsilon < \frac{3}{7}; \\ i+2 & \text{si } \varepsilon = \frac{3}{7}; \\ i+3 & \text{si } \frac{3}{7} < \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

On en déduit que la suite  $0 < \frac{3}{7} < \frac{3}{4} < 1$  vérifie les propriétés de la Proposition 5.13.

**Théorème 5.15.** Toute  $\mathbb{Q}$ -graduation admissible pour  $e$  est connexe à la graduation de Dynkin.

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  une  $\mathbb{Q}$ -graduation admissible pour  $e$ . D'après la Proposition 5.1, on peut supposer que  $\Gamma$  est une  $\mathbb{Z}$ -graduation admissible pour  $e$  et il suffit de montrer que  $\Gamma$  est connexe à  $\Gamma^{(0)}$ . Considérons les rationnels  $\varepsilon_k$  donnés par la Proposition 5.13 et la suite

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'_1 < \cdots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon'_{s-1} < \varepsilon_s = 1.$$

Pour tous  $(i, \lambda)$  et  $k \in \{0, \dots, s-1\}$ , on a

$$|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon'_k)}| \leq 1 \quad \text{et} \quad |p_{i,\lambda}^{(\varepsilon'_k)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_{k+1})}| \leq 1.$$

D'après la Proposition 5.12, d'une part les graduations  $\Gamma^{(\varepsilon_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  sont adjacentes pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$  et d'autre part, les graduations  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon_{k+1})}$  le sont aussi. Le théorème s'ensuit.  $\square$

*Démonstration du Théorème 5.7.* Si  $\Gamma, \Gamma' \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$  alors d'après le théorème précédent, elles sont toutes les deux connexes à la graduation de Dynkin. En particulier, elles sont connexes entre elles.  $\square$

**Remarque 5.16.** D'après le Théorème 5.7, le problème d'isomorphisme des  $W$ -algèbres se réduit à l'étude de la relation d'équivalence sur l'ensemble des paires  $e$ -admissibles pour une graduation  $e$ -admissible donnée.

## 6. PROBLÈME D'ISOMORPHISME POUR LES GRADUATIONS OPTIMALES

On montre dans cette section que les  $W$ -algèbres associées aux paires  $e$ -admissibles de certaines graduations sont isomorphes. On conserve les notations des sections précédentes. Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une graduation de  $\mathfrak{g}$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  avec  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 2$ . On considère la forme bilinéaire antisymétrique

$$\Phi_e : \mathfrak{g}_{-b} \times \mathfrak{g}_{b-a} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \langle e, [x, y] \rangle,$$

où  $b \in \mathbb{Q}$ . On rappelle que  $\mathfrak{g}_k^e$  désigne l'intersection de  $\mathfrak{g}_k$  avec  $\mathfrak{g}^e$  pour  $k \in \mathbb{Q}$ . Comme  $\mathfrak{g}_{b-a}$  et  $\mathfrak{g}_{a-b}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing, on montre aisément le lemme suivant.

**Lemme 6.1.** Soit  $V$  (resp.  $W$ ) un supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{-b}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{-b}$  (resp. de  $\mathfrak{g}_{b-a}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{b-a}$ ). Alors la restriction de  $\Phi_e$  à  $V \times W$  est non dégénérée. En particulier,  $\dim V = \dim W$ .

**Lemme 6.2.** Soit  $U$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}_{-b}$  tel que  $U \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Alors  $\dim(U^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{b-a}]) = \dim \mathfrak{g}_{b-a} - \dim \mathfrak{g}_{b-a}^e - \dim U$ .

*Démonstration.* Soient  $V$  un supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{-b}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{-b}$  contenant  $U$  et  $W$  un supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{b-a}^e$  dans  $\mathfrak{g}_{b-a}$ . D'après le Lemme 6.1, la restriction de la forme de Killing à  $[e, W] \times V$  est non dégénérée. Il en résulte que

$$\dim(U^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{b-a}]) = \dim \mathfrak{g} - \dim(U + [e, \mathfrak{g}_{b-a}]^\perp) = \dim[e, \mathfrak{g}_{b-a}] - \dim U.$$

Le lemme s'ensuit.  $\square$

Supposons désormais que la graduation  $\Gamma$  soit admissible pour  $e$ .

**Proposition 6.3.** *Soient  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  une paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma$  et  $b \in ]0, \frac{a}{2}]$ . On pose  $U' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_{b-a}$ ,  $V' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_{-b}$ ,  $U = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_{b-a}$  et  $V = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_{-b}$ . Alors  $\dim U + \dim V' = \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim \mathfrak{g}_{b-a}^e = \dim U' + \dim V$ .*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $\dim U + \dim V' = \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim \mathfrak{g}_{b-a}^e$ . Comme la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est  $e$ -admissible, on a, d'après la condition (A3) de la Définition 2.2,

$$V'^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{b-a}] = [e, U].$$

Par suite,  $\dim(V'^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{b-a}]) = \dim U$  car  $U \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . D'après le Lemme 6.2, on a  $\dim(V'^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{b-a}]) = \dim \mathfrak{g}_{b-a} - \dim \mathfrak{g}_{b-a}^e - \dim V'$ , d'où l'égalité car  $\dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim \mathfrak{g}_{b-a}^e = \dim \mathfrak{g}_{b-a} - \dim \mathfrak{g}_{b-a}^e$  d'après le Lemme 6.1. Des arguments analogues s'appliquent pour montrer la deuxième égalité.  $\square$

**Définition 6.4.** *Soit  $b > 0$ . Une  $\mathbb{Q}$ -graduation  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  est dite  **$b$ -optimale pour  $e$**  si  $\mathfrak{g}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$  et s'il existe  $a \in \mathbb{N}$ , avec  $a \geq 2$ , tel que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ .*

**Exemples 6.5.** (1) Une graduation de Dynkin est 1-optimale pour  $e$ .

(2) Une graduation 2d-bonne est  $d$ -optimale pour  $e$ .

(3) La graduation  $\Gamma$  de l'Exemple 2.8 est 1-optimale pour  $e$ .

(4) Il n'existe pas toujours des graduations  $b$ -optimales pour  $e$ . C'est le cas de la graduation  $\Gamma$  de l'Exemple 2.13.

**Remarque 6.6.** (1) Soient  $b > b' > 0$  et  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une graduation  $b'$ -optimale pour  $e$  telle que  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ . Alors  $\Gamma$  est  $b$ -optimale pour  $e$ .

(2) Si  $\Gamma$  est  $b$ -optimale et  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\lambda\Gamma$  est  $\lambda b$ -optimale.

(3) Une graduation  $b$ -optimale pour  $e$  est  $e$ -admissible. Cela provient du Théorème 2.14.

**Théorème 6.7.** *Si  $\Gamma$  est une graduation  $b$ -optimale pour  $e$ , alors les paires  $e$ -admissibles relativement à  $\Gamma$  sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$  une graduation  $b$ -optimale pour  $e$  telle que  $a \in \mathbb{N}$ , avec  $a \geq 2$ ,  $e \in \mathfrak{g}_a$  et  $a \geq 2b$ .

On désigne par  $h_\Gamma$  l'élément semisimple de  $\mathfrak{g}$  définissant  $\Gamma$ . On note  $-b_1, -b_2, \dots, -b_r$  les valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $]-\frac{a}{2}, 0[$  telles que  $b_i < b_{i+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ . En particulier,

$$\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \bigoplus_{i=1}^r (\mathfrak{g}_{b_i-a} \oplus \mathfrak{g}_{-b_i}) \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}.$$

Soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  une paire  $e$ -admissible relativement à  $\Gamma$  telle que

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \bigoplus_{i=1}^r (\mathfrak{m}_{b_i-a} \oplus \mathfrak{m}_{-b_i}) \oplus \mathfrak{m}_{-\frac{a}{2}}, \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \bigoplus_{i=1}^r (\mathfrak{n}_{b_i-a} \oplus \mathfrak{n}_{-b_i}) \oplus \mathfrak{n}_{-\frac{a}{2}},$$

où  $\mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{n}_j \subset \mathfrak{g}_j$  pour tout  $j$ . Comme  $\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , on a  $\mathfrak{g}_{b_i-a}^e = \{0\}$  pour tout  $i$ . D'après la Proposition 6.3, on a alors pour tout  $1 \leq i \leq r$

$$(20) \quad \dim \mathfrak{m}_{b_i-a} + \dim \mathfrak{n}_{-b_i} = \dim \mathfrak{n}_{b_i-a} + \dim \mathfrak{m}_{-b_i} = \dim \mathfrak{g}_{-b_i} - \dim \mathfrak{g}_{-b_i}^e = \dim \mathfrak{g}_{b_i-a}.$$

De plus,

$$(21) \quad \dim \mathfrak{m}_{-\frac{a}{2}} + \dim \mathfrak{n}_{-\frac{a}{2}} = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} - \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e.$$

Soit  $U$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e$  contenant  $\mathfrak{n}_{-\frac{a}{2}}$ . On pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}' &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{m}_{b_i-a}, & \mathfrak{n}' &:= \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{n}_{-b_i} \oplus U, \\ \mathfrak{m}'' &:= \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, & \text{et } \mathfrak{n}'' &:= \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U. \end{aligned}$$

Alors  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$  et  $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'')$  appartiennent à  $PA(e, \Gamma)$ . En effet, les propriétés (A1), (A2) et (A4) sont vérifiées par construction. Comme par construction  $[e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}] = [e, U]$ , on a (A3). Les sous-espaces  $\mathfrak{m}', \mathfrak{n}', \mathfrak{m}''$  et  $\mathfrak{n}''$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  qui vérifient (A5) car  $b_i < \frac{a}{2}$  et  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$ . La condition (A6) est satisfaite d'après (20) et (21). De plus, on a

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \succcurlyeq_{\Gamma} (\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'').$$

Le théorème s'ensuit grâce au lemme suivant :

**Lemme 6.8.** *Soient  $U$  et  $V$  sont deux sous-espaces de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$  supplémentaires de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e$ . Les paires  $\mathbf{P}_U$  et  $\mathbf{P}_V$  sont équivalentes entre elles, où pour  $W \in \{U, V\}$ ,  $\mathbf{P}_W$  désigne la paire  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus W)$ .*

*Démonstration.* Si  $-\frac{a}{2}$  n'est pas une valeur propre de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  (respectivement si  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e = \{0\}$ ), le lemme est évident car  $U = V = \{0\}$  (resp. car  $U = V = \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ ). Supposons donc que  $-\frac{a}{2}$  est une valeur propre de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  et que  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e \neq \{0\}$ . Montrons le lemme par récurrence sur  $n := \text{codim}_U U \cap V$ .

Supposons tout d'abord que  $n = 1$ . D'après le Lemme 6.1, la restriction de  $\Phi_e$  à  $U \times U$  est non dégénérée. Par suite, la dimension de  $U$  est un entier pair, donc la dimension de  $U \cap V$  est un entier impair car  $\dim U \cap V = \dim U - 1$ . Il s'ensuit que la restriction de  $\Phi_e$  à  $U \cap V \times U \cap V$  est dégénérée. Il existe donc un élément  $x$  non nul de  $U \cap V$  tel que  $\Phi_e(x, y) = 0$  pour tout  $y \in U \cap V$ . On pose

$$D = \mathbb{C}x \subset U \cap V.$$

On montre alors que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) := (\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus D, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U \cap V) \in PA(e, \Gamma)$ . En effet, les propriétés (A1), (A2) et (A4) de la Définition 2.2 sont vérifiées par construction. Comme  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_{\leq -\frac{a}{2}}$ , les sous-espaces  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  vérifiant (A5) de la même définition. De plus, (A6) est satisfaite car  $\dim D + \dim U \cap V = \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} - \dim \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e$ . Il nous reste à vérifier (A3). Il suffit de montrer que

$$D^{\perp} \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}] = [e, U \cap V].$$

Par construction, on a  $[e, U \cap V] \subset D^{\perp} \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}]$ . De plus,  $\dim [e, U \cap V] = \dim U - 1$  et  $\dim D^{\perp} \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}] = \dim D^{\perp} \cap [e, U] = \dim [e, U] - 1$ , d'où l'égalité voulue. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\mathbf{P}_U \succcurlyeq_{\Gamma} (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preceq_{\Gamma} \mathbf{P}_V.$$

Supposons à présent que le lemme soit vrai pour  $n - 1$  et montrons-le pour  $n$ . Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$  supplémentaires de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e$  tels que  $\text{codim}_U U \cap V = n$  et

$$U = \text{Vect}(\underline{w}, u_1, \dots, u_n) \quad \text{et} \quad V = \text{Vect}(\underline{w}, v_1, \dots, v_n),$$

où  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_r)$ , avec  $w_i, u_i, v_i \in \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$  pour tout  $i$ . En particulier,  $U \cap V = \text{Vect}(\underline{w})$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels non nuls tels que les sous-espaces

$$U_{\alpha,\beta} = \text{Vect}(\underline{w}, u_1, \dots, u_{n-1}, \alpha u_n + \beta v_n) \quad \text{et} \quad V_{\alpha,\beta} = \text{Vect}(\underline{w}, v_1, \dots, v_{n-1}, \alpha u_n + \beta v_n)$$

de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$  soient des supplémentaires de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e$ . Pour  $W \in \{U_{\alpha,\beta}, V_{\alpha,\beta}\}$  on a  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus W) \in PA(e, \Gamma)$ . De plus,  $\text{codim}_{U_{\alpha,\beta}} U_{\alpha,\beta} \cap V_{\alpha,\beta} = n - 1$  car  $U_{\alpha,\beta} \cap V_{\alpha,\beta} = \text{Vect}(\underline{w}, \alpha u_n + \beta v_n)$ . D'après l'hypothèse de récurrence, les paires  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U_{\alpha,\beta})$  et  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus V_{\alpha,\beta})$  sont équivalentes entre elles. De plus,  $\text{codim}_U U \cap U_{\alpha,\beta} = 1$  et  $\text{codim}_V V \cap V_{\alpha,\beta} = 1$ . Il s'ensuit que les paires  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U)$  et  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U_{\alpha,\beta})$  sont équivalentes entre elles. Il en est de même pour les paires  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus V)$  et  $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus V_{\alpha,\beta})$ , d'où le lemme.  $\square$

$\square$

**Théorème 6.9.** *Les paires  $e$ -admissibles relativement à une graduation  $b$ -optimale pour  $e$  sont équivalentes à la paire  $e$ -admissible optimale d'une graduation de Dynkin. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

*Démonstration.* On utilise dans cette démonstration les notions de la section précédente. Considérons les rationnels  $\varepsilon_k$  donnés par la Proposition 5.13 et la suite

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'_1 < \dots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon'_{s-1} < \varepsilon_s = 1.$$

Comme dans la démonstration du Théorème 5.15, on applique la Proposition 5.12. Pour tout  $k \in \{0, \dots, s-1\}$ , les graduations  $\Gamma^{(\varepsilon_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  sont adjacentes. Il en est de même des graduations  $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$  et  $\Gamma^{(\varepsilon_{k+1})}$ . Comme  $\Gamma = \Gamma^{(1)}$  est  $b$ -optimale pour  $e$ , on a  $\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(1)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . Pour tout  $\lambda$ , on a alors  $|\lambda| < \frac{a}{2}(d_i - 1) + b$ . Or, pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$  on a  $|\varepsilon \lambda| \leq |\lambda|$ . On en déduit que  $|\varepsilon \lambda| < \frac{a}{2}(d_i - 1) + b$ . En particulier,  $\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}^{(\varepsilon)} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ . La graduation  $\Gamma^{(\varepsilon)}$  est donc  $b$ -optimale pour  $e$  pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ . Le Théorème 6.7 suffit alors pour conclure.  $\square$

**Remarque 6.10.** *À partir du corollaire précédent, on retrouve comme cas particulier que les paires  $e$ -admissibles issues de bonnes graduations construites par Brundan et Goodwin dans [3] sont équivalentes à la paire optimale d'une graduation de Dynkin. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes, [3, Theorem 1].*

## 7. RÉSULTATS DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS

Les notations des sections précédentes sont conservées. On montre tout d'abord que les paires  $e$ -admissibles relatives à une graduation vérifiant une certaine propriété sont équivalentes entre elles. Ce résultat sera appliqué à plusieurs reprises dans la suite.

**Théorème 7.1.** *Si  $\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus (\mathfrak{g}_{b-a} + \mathfrak{g}_{-b})$ , où  $b \in ]0, \frac{a}{2}]$ , alors les paires  $e$ -admissibles relativement à la graduation  $\Gamma$  sont équivalentes entre elles.*

*Démonstration.* Compte tenu de la Remarque 4.10, on suppose que  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ . Si  $b = \frac{a}{2}$ , alors  $\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , la graduation  $\Gamma$  est donc  $\frac{a}{2}$ -optimale. Le théorème s'ensuit d'après le Théorème 6.7.

Considérons le cas où  $b \neq \frac{a}{2}$ . Si  $\mathfrak{g}_{b-a}^e = \{0\}$ , la graduation  $\Gamma$  est  $b$ -optimale. On conclut à partir du Théorème 6.7. Supposons alors que  $\mathfrak{g}_{b-a}^e \neq \{0\}$ .

Une paire  $e$ -admissible est de la forme  $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'') := (\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U'' \oplus V'', \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U' \oplus V')$  avec  $U'' \subset U' \subset \mathfrak{g}_{b-a}$  et  $V'' \subset V' \subset \mathfrak{g}_{-b}$ . Soit  $U$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}_{b-a}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{b-a}^e$  contenant  $U'$ . On peut alors montrer que  $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') := (\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U'', \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus V') \in PA(e, \Gamma)$ . En effet, les propriétés (A1), (A2), (A4) et (A5) sont vérifiées par construction. La propriété (A6) est satisfaite car d'après la Proposition 6.3 et le Lemme 6.1, on a  $\dim U'' + \dim V' = \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim \mathfrak{g}_{-b}^e = \dim U$ . Il reste à vérifier que  $\mathfrak{m}'$  et  $\mathfrak{n}'$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  qui vérifient la condition (A3). Comme  $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'') \in PA(e, \Gamma)$ , on a  $U''^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-b}] = [e, V']$ . La condition (A3) est donc vraie car  $\dim[e, \mathfrak{g}_{b-a}] = \dim U = \dim[e, U]$ . Par construction,  $\mathfrak{m}'$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\mathfrak{n}'' \subset \mathfrak{n}'$  et  $[V', V'] \subset \mathfrak{n}''$  car  $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'') \in PA(e, \Gamma)$ , on déduit que  $\mathfrak{n}'$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . De plus,

$$(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'') \preceq_\Gamma (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}').$$

On pose  $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U$ . On peut alors vérifier aisément que la paire  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  est  $e$ -admissible relativement à la graduation  $\Gamma$  telle que

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \preceq_\Gamma (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}').$$

Il s'ensuit que les paires  $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'')$  et  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$  sont équivalentes entre elles. Pour conclure, on considère  $U$  et  $V$  deux sous-espaces de  $\mathfrak{g}_{b-a}$  supplémentaires de  $\mathfrak{g}_{b-a}^e$ . Il suffit alors de montrer que les paires  $e$ -admissibles  $\mathbf{P}_U$  et  $\mathbf{P}_V$  sont équivalentes entre elles, où pour  $W \in \{U, V\}$ ,  $\mathbf{P}_W$  désigne la paire  $(\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus W, \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus W)$ . En effet, on utilise un raisonnement par récurrence sur  $n := \text{codim}_U U \cap V$  et on montre le résultat pour  $n = 1$ . Pour achever la récurrence, on utilise des arguments analogues à ceux de la démonstration du Lemme 6.8. On a

$$\dim \mathfrak{g}_{-b} \cap [e, U \cap V]^\perp = \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim[e, U \cap V] = \dim \mathfrak{g}_{-b}^e + 1.$$

De plus, on a  $\mathfrak{g}_{-b}^e \subset \mathfrak{g}_{-b} \cap [e, U \cap V]^\perp$ . Il existe alors  $D \subseteq \mathfrak{g}_{-b} \cap [e, U \cap V]^\perp$  tel que  $\dim D = 1$  et  $D \cap \mathfrak{g}_{-b}^e = \{0\}$ . On montre par suite que pour  $W \in \{U, V\}$ , on a  $\mathbf{A}_W := (\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \cap V, \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus W \oplus D) \in PA(e, \Gamma)$ . En effet, les conditions (A1), (A2) et (A4) sont vérifiées par construction. Les sous-espaces  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  vérifiant (A5) car  $[D, D] = \{0\}$ . On a (A6) car  $\dim U \cap V + \dim D = \dim W$ . Il reste à vérifier (A3). Il suffit donc de montrer que

$$(U \cap V)^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-b}] = [e, D].$$

Par construction, on a  $[e, D] \subset (U \cap V)^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-b}]$ , avec,

$$\dim(U \cap V)^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-b}] = \dim[e, \mathfrak{g}_{-b}] - \dim U \cap V = 1 = \dim[e, D],$$

d'où l'égalité voulue. Par ailleurs, on pose  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \cap V \oplus D$ . On vérifie alors aisément que  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \in PA(e, \Gamma)$ . Comme

$$\mathbf{P}_U \preceq_\Gamma \mathbf{A}_U \succcurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \preceq_\Gamma \mathbf{A}_V \succcurlyeq_\Gamma \mathbf{P}_V,$$

le résultat s'ensuit.  $\square$

On rappelle que  $\mathfrak{s}$  est la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  engendrée par un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  contenant  $e$ . Lorsque  $e$  est distingué, i.e.,  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 0$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles (cf. Remarque 4.12). On considère dans cette section le cas où  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ . On tente de répondre à la question suivante :

**Question 7.2.** *Sous l'hypothèse que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires admissibles pour  $e$  sont-elles équivalentes entre elles ?*

Compte tenu de la Remarque 5.16, on s'intéresse désormais à la question suivante.

**Question 7.3.** *Sous l'hypothèse que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires admissibles pour  $e$  relativement à une graduation  $e$ -admissible donnée sont-elles équivalentes entre elles ?*

### 7.1. Description des éléments nilpotents pour lesquels $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ .

**7.1.1. Cas classiques.** Nous supposons dans ce paragraphe que  $\mathfrak{g}$  soit l'une des algèbres de Lie simples de type classique suivantes :  $\mathfrak{sl}(V)$ ,  $\mathfrak{so}(V)$ ,  $\mathfrak{sp}(V)$ , où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Notre référence pour la théorie des orbites nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  est [15]. Rappelons que les orbites nilpotentes de  $\mathfrak{g}$  sont paramétrées par certaines partitions de  $n$ . Soit  $(d_1, \dots, d_m)$  la partition de  $n$  associée à l'orbite nilpotente de  $e$ , où  $m \in \{1, \dots, n\}$  et  $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}^*$ . On décrit dans ce paragraphe les conditions sur la partition  $(d_1, \dots, d_m)$  pour que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ .

Cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$  : Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(V)$  formée des endomorphismes de  $V$  de trace nulle. D'après [15, §3.7, Proposition 1], on a :

**Lemme 7.4.** *Le rang de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  est égal à 1 si et seulement si la partition associée à  $e$  est de la forme  $(d_1, d_2)$ . De plus,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , si  $d_1 = d_2$  et  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathbb{C}$  sinon.*

Cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  ou  $\mathfrak{sp}(V)$  : On désigne par  $\Phi$  une forme bilinéaire de  $V$  non dégénérée, symétrique ou alternée. Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie simple formée des endomorphismes  $x$  de  $V$  qui vérifient pour tous  $v, w \in V$  :

$$\Phi(xv, w) + \Phi(v, xw) = 0.$$

On a alors  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  si  $\Phi$  est symétrique et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$  si  $\Phi$  est alternée. On note  $G$  le groupe algébrique d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  formé des automorphismes  $g$  de  $V$  vérifiant pour tous  $v, w \in V$  :

$$\Phi(gv, gw) = \Phi(v, w).$$

Rappelons que d'après [15, Theorem 1.6], si  $\Phi$  est symétrique, l'ensemble des  $G$ -orbites nilpotentes dans  $\mathfrak{so}(V)$  est en bijection avec l'ensemble des partitions de  $n$  dont les parties paires ont un nombre d'occurrences pair. Si  $\Phi$  est alternée, l'ensemble des  $G$ -orbites nilpotentes dans  $\mathfrak{sp}(V)$  est en bijection avec l'ensemble des partitions de  $n$  dont les parties impaires ont un nombre d'occurrences pair. On pose, pour tout  $s \in \mathbb{N}^*$ ,  $r_s := \text{Card}\{j; d_j = s\}$ . Si  $\Phi$  est symétrique, d'après la remarque qui suit [15, §3.7, Proposition 2], on a l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \prod_{s \geq 1; s \text{ impair}} \mathfrak{so}_{r_s}(\mathbb{C}) \times \prod_{s \geq 1; s \text{ pair}} \mathfrak{sp}_{r_s}(\mathbb{C}).$$

Le lemme suivant s'ensuit :

**Lemme 7.5.** *On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ . Le rang de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  est égal à 1 si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (a)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit pair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est impair pour tout  $j \notin \{i, i+1\}$ .

- (b)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit impair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathbb{C}$  et  $d_j$  est impair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .



(c)  $m \geq 3$  et il existe  $i \in \{2, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit impair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_{i-1} = d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est impair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Si  $\Phi$  est alternée, toujours d'après la remarque qui suit [15, §3.7, Proposition 2], on a l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \prod_{s \geq 1; s \text{ impair}} \mathfrak{sp}_{r_s}(\mathbb{C}) \times \prod_{s \geq 1; s \text{ pair}} \mathfrak{so}_{r_s}(\mathbb{C}).$$

Le lemme suivant s'ensuit :

**Lemme 7.6.** *On suppose que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ . Le rang de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  est égal à 1 si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit impair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est pair pour tout  $j \notin \{i, i+1\}$ .

(b)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit pair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathbb{C}$  et  $d_j$  est pair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

(c)  $m \geq 2$  et il existe  $i \in \{2, \dots, m-1\}$  tel que  $d_i$  soit pair et

$$d_1 > d_2 > \dots > d_{i-1} = d_i = d_{i+1} > \dots > d_m.$$

Dans ce cas,  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et  $d_j$  est pair pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

**7.1.2. Cas exceptionnels.** Supposons dans ce paragraphe que  $\mathfrak{g}$  soit l'une des algèbres de Lie exceptionnelles  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$ . À l'aide de [6, Chapter 13], on détermine les éléments nilpotents  $e$  de  $\mathfrak{g}$  tels que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ . On liste ces éléments dans les Tables 3, 4 et 5, correspondantes à  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{F}_4$  et  $\mathbf{E}_6$  respectivement. Dans chacune d'elles, la première colonne donne le label de l'orbite de  $e$  dans la classification de Bala-Carter, la deuxième son diagramme de Dynkin pondéré, et la troisième sa dimension.


Label	Diagramme	$\dim G.e$
		
$A_1$	$\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}$	6
$\tilde{A}_1$	$\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}$	8

TABLE 3. Type  $\mathbf{G}_2$ .

Désormais,  $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$  est une  $\mathbb{Z}$ -graduation admissible pour  $e$  définie par un élément semisimple  $h_\Gamma$  de  $\mathfrak{g}$  et  $(e, h, f)$  est un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet de  $\mathfrak{g}$  tel que  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $f \in \mathfrak{g}_{-a}$  (cf. [24, Proposition 32.1.7]). On pose  $\mathfrak{s} := \text{Vect}(e, h, f)$  et  $t := h_\Gamma - \frac{a}{2}h$ . On désigne par  $\mathfrak{gl}(V)$  l'algèbre de Lie des endomorphismes de  $V$ . On suppose enfin que  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ .

Label	Diagramme	$\dim G.e$
$A_2 + \tilde{A}_1$	0 0 1 0	34
$\tilde{A}_2 + A_1$	0 1 0 1	36
$C_3(a_1)$	1 0 1 0	38
$B_3$	2 2 0 0	42
$C_3$	1 0 1 2	36

TABLE 4. Type  $\mathbf{F}_4$ .

Label	Diagramme	$\dim G.e$
$2A_2 + A_1$	1 0 1 0 1 0	54
$A_4 + A_1$	1 1 0 1 1 1	62
$A_5$	2 1 0 1 2 1	64
$D_5(a_1)$	1 1 0 1 1 2	64
$D_5$	2 0 2 0 2 2	68

TABLE 5. Type  $\mathbf{E}_6$ .

7.2. **Cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ .** Supposons que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(V)$  où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après le Lemme 7.4, comme  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , la partition associée à  $e$  est  $(d_1, d_2)$ . L'élément  $t$  appartient à  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  et il est semisimple. En tant que  $\mathfrak{s}$ -module,  $V$  se décompose en composantes isotypiques. Comme  $t$  commute avec  $\mathfrak{s}$ , d'après le lemme de Schur,  $t$  laisse stable chaque composante isotypique. Puisque  $t$  est semisimple, sa restriction à chaque composante isotypique est semisimple. De plus, comme  $t \in \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$  on a la décomposition

$$(22) \quad V = V_1 \oplus V_2$$

où  $V_i$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $d_i$  et  $V_i$  est stable par  $\text{ad } t$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$ . Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , il existe  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  tel que  $t|_{V_i} = \alpha_i \text{id}_{V_i}$  et on a  $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = 0$ . Rappelons l'identification en tant que  $\mathfrak{gl}(V)$ -modules

$$\mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V$$

où pour  $(\phi, v) \in V^* \times V$  l'endomorphisme  $\phi \otimes v$  de  $V$  est défini par  $\phi \otimes v(x) = \phi(x)v$  pour tout  $x \in V$ . Par suite,

$$\mathfrak{gl}(V) = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq 2} \mathbf{V}_{i,j} \quad \text{où} \quad \mathbf{V}_{i,j} := V_i^* \otimes V_j.$$

Alors  $\mathbf{V}_{i,j}$  est un  $\mathfrak{s}$ -module via l'opération adjointe dans  $\mathfrak{gl}(V)$  et il est  $\text{ad } t$ -stable, avec

$$\text{ad } t|_{\mathbf{V}_{i,j}} = (\alpha_j - \alpha_i) \text{id}_{\mathbf{V}_{i,j}}.$$

De plus on a

$$(23) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{V}_{i,j} \times \mathbf{V}_{k,l}} = 0 \text{ si } (i,j) \neq (l,k) \text{ et } \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbf{V}_{i,j} \times \mathbf{V}_{j,i}} \text{ est non dégénérée.}$$

Autrement dit,  $\mathbf{V}_{i,j}$  et  $\mathbf{V}_{j,i}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing.

On peut donc faire une étude directe des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur les  $\mathfrak{s}$ -modules  $\mathbf{V}_{i,j}$ . On en déduit que le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  est au plus égal à 2. D'après le Théorème 5.7 et le Théorème 7.1, on peut conclure.

**Théorème 7.7.** *Lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$  et  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

**7.3. Cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  ou  $\mathfrak{sp}(V)$ .** On traite dans ce paragraphe le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ , et on montre le résultat de façon analogue si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ . Supposons donc que  $\mathfrak{g}$  soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(V)$ . On conserve les notations utilisées dans la Section 7.1. La forme bilinéaire non dégénérée  $\Phi$  induit un isomorphisme  $\beta : V \rightarrow V^*$  qui associe à un élément  $v$  de  $V$  la forme linéaire  $\Phi(v, \cdot)$ . Les isomorphismes  $\beta$  et  $\beta^{-1}$  sont des isomorphismes de  $\mathfrak{so}(V)$ -modules. On a l'identification de  $\mathfrak{so}(V)$ -modules

$$\mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V \simeq V \otimes V.$$

En effet, la structure de  $\mathfrak{so}(V)$ -module sur  $\mathfrak{gl}(V)$  est donnée par l'opération adjointe dans  $\mathfrak{gl}(V)$ . De plus, pour tous  $x, v, w \in V$ , l'identification est donnée par

$$(v \otimes w)(x) = \Phi(v, x)w.$$

Pour  $v, w \in V$ , on note  $v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v$  et  $\bigwedge^2 V = \text{Vect}(v \wedge w; v, w \in V)$  la composante de degré 2 de la graduation naturelle de l'algèbre extérieure de  $V$ . On a  $v \wedge w \in \mathfrak{so}(V)$  pour tout  $v, w \in V$ . On en déduit pour des raisons de dimension

$$\mathfrak{so}(V) = \bigwedge^2 V.$$

**Cas (a) ou (b).** Supposons tout d'abord que la partition associée à  $e$  vérifie l'une des conditions (a) ou (b) du Lemme 7.5. On peut supposer qu'elle est de la forme  $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$ , avec  $d_1 = d_2$ , où on ne suppose plus que les  $d_i$  soient croissants.

Comme  $t$  est un élément semisimple de  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ , on a la décomposition

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $V_i$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $d_i$ , avec  $t|_{V_1} = \alpha_1 \text{id}_{V_1}$ ,  $t|_{V_2} = \alpha_2 \text{id}_{V_2}$  et  $t|_{V_i} = 0$  pour tout  $i \geq 3$ . Comme la trace de  $t$  est nulle,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . On pose donc  $\alpha := \alpha_1 = -\alpha_2$ . Ici,  $V_1 \oplus V_2, V_3, \dots, V_m$  sont les composantes isotypiques du  $\mathfrak{s}$ -module  $V$ , et définissent une décomposition orthogonale par rapport à  $\Phi$ . Observons que  $V_1$  et  $V_2$  sont totalement isotropes par rapport à  $\Phi$ . On a

$$\bigwedge^2 (V_1 + V_2) = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$$

où

$$\mathbf{W}_0 = \text{Vect}(v \wedge w; v \in V_1, w \in V_2) \simeq \mathfrak{gl}(V_1),$$

$$\mathbf{W}_+ \simeq \bigwedge^2 V_1 = \text{Vect}(v \wedge w; v, w \in V_1) \text{ et } \mathbf{W}_- \simeq \bigwedge^2 V_2 = \text{Vect}(v \wedge w; v, w \in V_2).$$

On note

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-.$$

On a donc la décomposition orthogonale

$$(24) \quad \mathfrak{so}(V) = \bigwedge^2 V = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1 \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq m} \mathbf{V}_{1,i} \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq m} \mathbf{V}_{2,i} \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq j \leq m} \mathbf{V}_{i,j},$$

avec  $\mathbf{V}_{i,i} \simeq \bigwedge^2 V_i$  et  $\mathbf{V}_{i,j} \simeq V_i \otimes V_j$  pour  $i < j$ , des isomorphismes en tant que  $\mathfrak{s}$ -modules. De plus,  $\mathbf{W}_+$  et  $\mathbf{W}_-$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing. De plus, les crochets suivants s'annulent :  $[\mathbf{W}_\pm, \mathbf{W}_\pm]$ ,  $[\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_\pm]$ ,  $[\mathbf{W}_\pm, \mathbf{V}_{1,i}]$  et  $[\mathbf{W}_\pm, \mathbf{V}_{2,i}]$  pour  $i \geq 3$ .

Notre objectif est d'obtenir l'équivalence des paires  $e$ -admissibles. Compte tenu de la Remarque 4.10, on va s'intéresser au cas où  $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ . D'après ce qui précède, on peut faire une étude directe des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  sur les sous-espaces  $\mathbf{W}_0$ ,  $\mathbf{W}_1$  et  $\mathbf{V}_{i,j}$  pour tous  $i, j$ . On résume dans la Table 6 l'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  réparties dans chacun des sous-espaces  $\mathbf{W}_+$ ,  $\mathbf{W}_-$ ,  $\mathbf{V}_{1,i}$  et  $\mathbf{V}_{2,i}$ . On encadre dans cette table la valeur propre  $k$  telle que  $\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ .

$d_1$	$\alpha$	$\mathbf{W}_+$	$\mathbf{W}_-$	$\mathbf{V}_{1,i}$	$\mathbf{V}_{2,i}$
pair	$] -\frac{a}{2}, 0[$	$2\alpha$	$-2\alpha - a$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
pair	$] 0, \frac{a}{2}[$	$2\alpha - a$	$-2\alpha$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
impair	$] -a, -\frac{a}{2}[$	$2\alpha + a$	$-2\alpha - 2a$	$\alpha$	$-a - \alpha$
impair	$] \frac{a}{2}, a[$	$2\alpha - 2a$	$-2\alpha + a$	$-a + \alpha$	$-\alpha$

TABLE 6. Cas (a) ou (b) : valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  dans  $] -a, 0[$ .

Afin de montrer l'équivalence des paires  $e$ -admissibles, on distingue deux cas : le cas où le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  est égal à 4, et le cas où il est strictement inférieur à 4.

**Cas I :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  est égal à 4. On traite ici uniquement le cas où  $d_1$  est pair et  $\alpha < 0$ , les autres cas se traitent de façon analogue. Soit  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  une paire  $e$ -admissible de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\Gamma$ . Alors  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  peut s'écrire de la forme suivante :

$$\mathbf{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U' \oplus V' \oplus W' \oplus X' \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus V \oplus W \oplus X,$$

où  $U' \subset U \subset \mathfrak{g}_{2\alpha}$ ,  $V' \subset V \subset \mathfrak{g}_{-2\alpha-a}$ ,  $W' \subset W \subset \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+\alpha}$  et  $X' \subset X \subset \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}-\alpha}$ .

On pose

$$\mathbf{m}' := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus V' \oplus W', \quad \mathbf{n}' := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha-a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+\alpha} \oplus X$$

$$\text{et} \quad \mathbf{m}'' := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha-a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}+\alpha}.$$

On montre alors de façon directe que les paires  $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$  et  $(\mathbf{m}'', \mathbf{m}'')$  sont  $e$ -admissibles relativement à la graduation  $\Gamma$ . On peut donc conclure car

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \preceq_\Gamma (\mathbf{m}', \mathbf{n}') \succeq_\Gamma (\mathbf{m}'', \mathbf{m}'').$$

**Cas II :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  est strictement inférieur à 4. On représente dans la Table 7 les différentes possibilités.

Lorsque  $\alpha \in \{\pm \frac{a}{6}, \pm \frac{2a}{3}\}$ , on a  $\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{2a}{3}} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}}$ . On conclut grâce au Théorème 7.1.

$d_1$	$\alpha$	$\mathbf{W}_+$	$\mathbf{W}_-$	$\mathbf{V}_{1,i}$	$\mathbf{V}_{2,i}$
pair	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$
pair	$-\frac{a}{6}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
pair	$\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$
pair	$\frac{a}{6}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$
impair	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$
impair	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
impair	$\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$
impair	$\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$

TABLE 7. Cas (a) ou (b) : possibilités du cas II.

Lorsque  $\alpha \in \{\pm\frac{a}{4}, \pm\frac{3a}{4}\}$ , on remarque que la graduation  $\Gamma$  est  $\frac{a}{2}$ -optimale. On conclut alors grâce au Théorème 6.7.

**Cas (c).** Supposons que la partition associée à  $e$  vérifie la condition (c) du Lemme 7.5. On peut supposer qu'elle est de la forme  $(d_0, d_0, d_0, d_1, \dots, d_m)$ , où on ne suppose plus que les  $d_i$  soient croissants.

Comme  $t$  est un élément semisimple de  $\mathfrak{g}^s$ , on a la décomposition en composantes isotypiques du  $\mathfrak{s}$ -module  $V$

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_m.$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $V_i$  est un  $\mathfrak{s}$ -module simple de dimension  $d_i$ , avec  $t|_{V_i} = 0$ . De plus,  $V_0$  admet une décomposition

$$V_0 = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$$

où  $\mathbf{W}_0$  est un sous-espace régulier relativement à  $\Phi$  et  $\mathbf{W}_+$  et  $\mathbf{W}_-$  sont deux sous-espaces totalement isotropes par rapport à  $\Phi$ . En particulier,  $t|_{\mathbf{W}_0} = 0$ ,  $t|_{\mathbf{W}_+} = \alpha_1 \text{id}_{\mathbf{W}_+}$  et  $t|_{\mathbf{W}_-} = \alpha_2 \text{id}_{\mathbf{W}_-}$ . Comme la trace de  $t$  est nulle,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . On pose donc  $\alpha := \alpha_1 = -\alpha_2$ . On a donc la décomposition

$$\mathfrak{so}(V) = \mathbf{W}_{0,0} \oplus \mathbf{W}_{0,+} \oplus \mathbf{W}_{0,-} \oplus \mathbf{W}_{+,+} \oplus \mathbf{W}_{+,-} \oplus \mathbf{W}_{-,-} \oplus \bigoplus_{i \geq 1} (\mathbf{W}_{0,i} \oplus \mathbf{W}_{+,i} \oplus \mathbf{W}_{-,i}) \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq m} \mathbf{V}_{i,j},$$

avec  $\mathbf{W}_{0,0} \simeq \bigwedge^2 \mathbf{W}_0$ ,  $\mathbf{W}_{\pm,\pm} \simeq \bigwedge^2 \mathbf{W}_{\pm}$ ,  $\mathbf{W}_{0,\pm} \simeq \mathbf{W}_0 \otimes \mathbf{W}_{\pm}$ ,  $\mathbf{W}_{+,-} \simeq \mathbf{W}_+ \otimes \mathbf{W}_-$ ,  $\mathbf{V}_{i,i} \simeq \bigwedge^2 V_i$  pour tout  $i \geq 1$ ,  $\mathbf{W}_{0,i} \simeq \mathbf{W}_0 \otimes V_i$ ,  $\mathbf{W}_{\pm,i} \simeq \mathbf{W}_{\pm} \otimes V_i$  et  $\mathbf{V}_{i,j} \simeq V_i \otimes V_j$  pour tous  $1 \leq i < j$ . D'après ce qui précède, les crochets suivants s'annulent :  $[\mathbf{W}_{\pm,\pm}, \mathbf{W}_{\pm,\pm}]$ ,  $[\mathbf{W}_{\pm,i}, \mathbf{W}_{\pm,\pm}]$ ,  $[\mathbf{W}_{\pm,i}, \mathbf{W}_{0,\pm}]$  et  $[\mathbf{W}_{0,\pm}, \mathbf{W}_{\pm,\pm}]$ .

On peut donc faire une étude directe des valeurs propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  sur ces différents sous-espaces. Comme  $\mathfrak{g}_{\leq -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ , on a  $-a < \alpha < a$ . Pour montrer l'équivalence des paires  $e$ -admissibles relativement à  $\Gamma$ , on considère le cas où  $\alpha > 0$ . L'autre cas se traite de façon analogue. On résume dans la Table 8 l'ensemble des valeurs propres de  $\text{ad } h_{\Gamma}$  appartenant à  $] -a, 0[$  dans les différents sous-espaces de la décomposition précédente. On encadre dans cette table la valeur propre  $k$  telle que  $\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$ .

$\alpha$	$\mathbf{W}_{+,i}$	$\mathbf{W}_{-,i}$	$\mathbf{W}_{0,+}$	$\mathbf{W}_{0,-}$	$\mathbf{W}_{+,+}$	$\mathbf{W}_{-,-}$
$] \frac{a}{2}, a[$	$\alpha - a$	$-\alpha$	$\alpha - a$	$-\alpha$	$2\alpha - 2a$	$-2\alpha + a$
$] 0, \frac{a}{2}[$	$\alpha - a$	$-\alpha$	$\alpha - a$	$-\alpha$	$2\alpha - a$	$-2\alpha$
$\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$		

TABLE 8. Cas (c) : valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  dans  $] -a, 0[$ .

Lorsque  $\alpha \in ]0, \frac{a}{2}[$ , on peut montrer l'équivalence des paires  $e$ -admissibles de façon analogue à la démarche utilisée dans le paragraphe précédent. Lorsque  $\alpha = \frac{a}{2}$ , la graduation est  $\frac{a}{2}$ -optimale, on peut donc conclure grâce au Théorème 6.7. Supposons donc que  $\alpha \in ] \frac{a}{2}, a[$ . Afin de montrer l'équivalence des paires  $e$ -admissibles, on distingue deux cas : le cas où le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  est égal à 4, et le cas où il est strictement inférieur à 4.

**Cas I :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  est égal à 4. Soit  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  une paire  $e$ -admissible de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\Gamma$ . Alors  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  peut s'écrire de la forme suivante :

$$\mathbf{m} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U' \oplus V' \oplus W' \oplus X' \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus V \oplus W \oplus X,$$

où  $U' \subset U \subset \mathfrak{g}_{\alpha-a}$ ,  $V' \subset V \subset \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ,  $W' \subset W \subset \mathfrak{g}_{2\alpha-2a}$  et  $X' \subset X \subset \mathfrak{g}_{-2\alpha+a}$ . Soit  $\tilde{V}$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{-\alpha} \cap \mathfrak{g}^e$  contenant  $V$ . On pose

$$\mathbf{m}' := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus V' \oplus W', \quad \mathbf{n}' := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus \tilde{V} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a} \oplus X \quad \text{et} \quad \mathbf{m}'' := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \tilde{V} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a}.$$

On montre par calculs directs que les paires  $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$  et  $(\mathbf{m}'', \mathbf{m}'')$  sont  $e$ -admissibles relativement à la graduation  $\Gamma$ . De plus, elles vérifient

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \preceq_\Gamma (\mathbf{m}', \mathbf{n}') \succeq_\Gamma (\mathbf{m}'', \mathbf{m}'').$$

On peut donc conclure grâce au lemme suivant :

**Lemme 7.8.** Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  supplémentaires de  $\mathfrak{g}_{-\alpha} \cap \mathfrak{g}^e$ . Les paires  $\mathbf{P}_U$  et  $\mathbf{P}_V$  sont équivalentes entre elles, où pour  $W \in \{U, V\}$ ,  $\mathbf{P}_W$  désigne la paire  $e$ -admissible  $(\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus W \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a}, \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus W \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a})$ .

*Démonstration.* Montrons le lemme par récurrence sur  $n := \text{codim}_U U \cap V$ . On se contente de le montrer dans le cas où  $n = 1$ , le reste de la récurrence étant similaire à celui de la démonstration du Lemme 6.8. On pose

$$D := \mathfrak{g}_{\alpha-a} \cap [e, U \cap V]^\perp, \quad \mathbf{m} := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus D \oplus U \cap V \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a},$$

$$\text{et } \mathbf{A}_W := (\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \cap V \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a}, \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus D \oplus W \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a}),$$

pour  $W \in \{U, V\}$ . On vérifie sans peine que les paires  $\mathbf{A}_U$ ,  $\mathbf{A}_V$  et  $(\mathbf{m}, \mathbf{m})$  sont  $e$ -admissibles relativement à la graduation  $\Gamma$ . Le lemme s'ensuit car

$$\mathbf{P}_U \preceq_\Gamma \mathbf{A}_U \succeq_\Gamma (\mathbf{m}, \mathbf{m}) \preceq_\Gamma \mathbf{A}_V \succeq_\Gamma \mathbf{P}_V.$$

□

**Cas II :** le nombre de valeurs propres de  $\text{ad } h_\Gamma$  appartenant à  $] -a, 0[$  est strictement inférieur à 4. On représente dans la Table 9 les deux possibilités.

$\alpha$	$\mathbf{W}_{+,i} + \mathbf{W}_{0,+}$	$\mathbf{W}_{-,i} + \mathbf{W}_{0,-}$	$\mathbf{W}_{+,+}$	$\mathbf{W}_{-,-}$
$\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
$\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$

TABLE 9. Cas (c) : possibilités du cas II.

Lorsque  $\alpha = \frac{2a}{3}$ , on conclut d'après le Théorème 7.1. Supposons désormais que  $\alpha = \frac{3a}{4}$ . Soit  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$  une paire  $e$ -admissible de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\Gamma$ . Alors  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$  peut s'écrire de la forme suivante :

$$\mathbf{m}_1 = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U' \oplus V' \oplus W' \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_1 = \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \oplus V \oplus W,$$

où  $U' \subset U \subset \mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}$ ,  $V' \subset V \subset \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$  et  $W' \subset W \subset \mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}}$ . Soient  $\tilde{U}$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}^e$  contenant  $U$  et  $\tilde{V}$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$  supplémentaire de  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^e$  contenant  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \cap \mathbf{W}_{+,+}$ . On pose

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_2 &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U' \oplus V' \quad , \quad \mathbf{n}_2 := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \tilde{U} \oplus V \oplus W, \\ \mathbf{m}_3 &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \tilde{U} \oplus V' \quad , \quad \mathbf{n}_3 := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \tilde{U} \oplus V, \\ \mathbf{m}_4 &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \tilde{U} \quad , \quad \mathbf{n}_4 := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}, \\ \text{et } \mathbf{m}_5 &:= \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus \tilde{U} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \cap \mathbf{W}_{+,+}. \end{aligned}$$

On vérifie de façon directe que les paires  $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ ,  $(\mathbf{m}_3, \mathbf{n}_3)$ ,  $(\mathbf{m}_4, \mathbf{n}_4)$  et  $(\mathbf{m}_5, \mathbf{n}_5)$  sont  $e$ -admissibles relativement à la graduation  $\Gamma$ . De plus, on a

$$(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1) \preceq_{\Gamma} (\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) \succcurlyeq_{\Gamma} (\mathbf{m}_3, \mathbf{n}_3) \preceq_{\Gamma} (\mathbf{m}_4, \mathbf{n}_4) \succcurlyeq_{\Gamma} (\mathbf{m}_5, \mathbf{n}_5).$$

On déduit alors l'équivalence des paires  $e$ -admissibles dans ce cas à partir du lemme suivant.

**Lemme 7.9.** *Soient  $U$  et  $V$  deux sous-espaces de  $\mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}$  supplémentaires de  $\mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}^e$ . Les paires  $\mathbf{P}_U$  et  $\mathbf{P}_V$  sont équivalentes entre elles, où pour  $X \in \{U, V\}$ ,  $\mathbf{P}_X$  désigne la paire  $e$ -admissible  $(\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus X \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \cap \mathbf{W}_{+,+}, \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus X \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \cap \mathbf{W}_{+,+})$ .*

*Démonstration.* Montrons le lemme par récurrence sur  $n := \text{codim}_U U \cap V$ . On se contente de le montrer dans le cas où  $n = 1$ , le reste de la récurrence étant similaire à celui de la démonstration du Lemme 6.8. Pour simplifier, on note  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+$  le sous-espace  $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}} \cap \mathbf{W}_{+,+}$ . On pose

$$\begin{aligned} D &:= \mathfrak{g}_{-\frac{a}{4}} \cap [e, U \cap V]^\perp \quad , \quad \mathbf{m} := \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \cap V \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ \oplus D, \\ \text{et } \mathbf{A}_X &:= (\mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus U \cap V \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+, \mathfrak{g}_{\leq -a} \oplus X \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}^+ \oplus D), \end{aligned}$$

pour  $X \in \{U, V\}$ . On vérifie sans peine que les paires  $\mathbf{A}_U$ ,  $\mathbf{A}_V$  et  $(\mathbf{m}, \mathbf{m})$  sont  $e$ -admissibles relativement à la graduation  $\Gamma$ . Le lemme s'ensuit car

$$\mathbf{P}_U \preceq_{\Gamma} \mathbf{A}_U \succcurlyeq_{\Gamma} (\mathbf{m}, \mathbf{m}) \preceq_{\Gamma} \mathbf{A}_V \succcurlyeq_{\Gamma} \mathbf{P}_V.$$

□

On a donc montré le théorème suivant.

**Théorème 7.10.** *Lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  et  $\text{rk } \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

De façon analogue, on montre un résultat similaire lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ .

**Théorème 7.11.** *Lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$  et  $\mathrm{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.*

**7.4. Cas où  $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$ .** Supposons que  $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$ . Comme  $\mathfrak{g}$  est un  $\mathfrak{s}$ -module,  $\mathfrak{g}$  se décompose en composantes isotypiques de  $\mathfrak{s}$ -modules simples. L'élément  $t$  est semisimple et appartient à  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ . Il laisse donc stable chaque composante isotypique. Puisque  $t$  est semisimple, sa restriction à chaque composante isotypique est semisimple. De nouveau comme  $t \in \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ , on a une décomposition de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{s}$ -modules simples stables par  $\mathrm{ad} t$ . En conclusion,  $\mathfrak{g}$  se décompose en  $\mathrm{ad} t$ -espaces propres

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathbf{W}_{\lambda}.$$

Pour  $\lambda \neq 0$ ,  $\mathbf{W}_{\lambda}$  et  $\mathbf{W}_{-\lambda}$  sont en couplage par rapport à la forme de Killing. De plus, chaque  $\mathrm{ad} t$ -espace propre se décompose en  $\mathfrak{s}$ -modules simples. Afin d'étudier l'équivalence des paires  $e$ -admissibles, on traite au cas par cas les orbites nilpotentes des Tables 3, 4 et 5. Pour chacune d'entre elles, on peut expliciter les décompositions ci-dessus à l'aide du logiciel GAP4. On étudie ensuite les valeurs propres de  $\mathrm{ad} h_{\Gamma}$  sur les espaces propres  $\mathbf{W}_{\lambda}$ . En s'inspirant des constructions faites dans les sections précédentes, on montre que lorsque  $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$  ou  $\mathbf{E}_6$  et  $\mathrm{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$ , les paires  $e$ -admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les  $W$ -algèbres associées sont isomorphes.

## RÉFÉRENCES

- [1] K. Baur, S. Ghandour and A. Moreau,  *$\chi$ -admissible subalgebras and finite  $W$ -algebras*, préprint 2010 (communication privée).
- [2] K. Baur and N. Wallach, *Nice parabolic subalgebras of reductive Lie algebras*, Represent. Theory **9** (2005), 1–29.
- [3] J. Brundan and S.M. Goodwin, *Good grading polytopes*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **94** (2007), no. 1, 155–180.
- [4] J. Brundan and A. Kleshchev, *Shifted Yangians and finite  $W$ -algebras*, Adv. Math. **200** (2006), no. 1, 136–195.
- [5] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press (1956).
- [6] R.W. Carter, *Finite groups of Lie type : Conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, New York (1985).
- [7] C. Chevalley and S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 85–124.
- [8] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.
- [9] D. Collingwood and W. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, MA, 1993.
- [10] A.G. Elashvili and V.G. Kac, *Classification of good gradings of simple Lie algebras*, in Lie groups and invariant theory (E.B. Vinberg ed.), Amer. Math. Soc. Transl. **213** (2005), 85–104.
- [11] W.L. Gan and V. Ginzburg, *Quantization of Slodowy slices*, Int. Math. Res. Not. (2002), 243–255.
- [12] A. Grothendieck, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publication IHES, tome 29 (1966), 95–103.
- [13] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, no. 52.
- [14] G. Hochschild, *Cohomology of Algebraic Linear Groups*, Illinois J. Math., **5** (1961), 492–519.
- [15] J.C. Jantzen, *Nilpotent Orbits in Representation Theory*, Progress in Mathematics, **228** Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.



- [16] V. Kac, S. Roan and M. Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Comm. Math. Phys. **241** (2003), 307–342.
- [17] M. Kashiwara and P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag (2006)
- [18] B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math. **48** (1978), 101–184.
- [19] I. Losev, *Finite  $W$ -algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hindustan Book Agency, New Delhi, vol.III (2010), 1281–1307.
- [20] T.E. Lynch, *Generalized Whittaker vectors and representation theory*, Ph.D. Thesis, M.I.T., 1979.
- [21] A. Premet, *Special transverse slices and their enveloping algebras*, With an appendix by Serge Skryabin. Adv. Math. **170** (2002), no. 1, 1–55.
- [22] E. Ragoucy and P. Sorba, *Yangian realisations from finite  $W$ -algebras*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), 551–572.
- [23] S. Skryabin, An appendix to [21].
- [24] P. Tauvel and R.W.T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer-Verlag (2005)
- [25] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Mathematics, **118**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

GUILNARD SADAKA, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, BOULEVARD MARIE ET PIERRE CURIE, 86962 FUTUROSCEPE CHASSENEUIL CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* `guilnard.sadaka@math.univ-poitiers.fr`

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE VERSAILLES, 45 AVENUE DES ETAS-UNIS, 78035 VERSAILLES CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* `guilnard.sadaka@uvsq.fr`